

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
VINCENT CHALIFOUR

POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET SURFACES SOLITONIQUES ASSOCIÉES

JUILLET 2019

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

PRÉSENTATION DU JURY

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Alfred Michel Grundland, Directeur de Mémoire
Département de mathématiques et informatique
Université du Québec à Trois-Rivières

M. Jean-François Quessy, Membre du jury
Département de mathématiques et informatique
Université du Québec à Trois-Rivières

M. Pierre Bénard, Membre du jury
Département de chimie, biochimie et physique
Université du Québec à Trois-Rivières

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous construisons par la méthode des surfaces solitoniques les surfaces minimales associées à dix polynômes orthogonaux classiques : Legendre, Legendre associé, Bessel, Chebyshev de première espèce, Chebyshev de seconde espèce, Laguerre, Laguerre associé, Hermite, Gegenbauer et Jacobi. Les équations de Gauss-Weingarten et de Gauss-Mainardi-Codazzi sont étudiées pour les cas où la courbure moyenne de la surface est constante ou nulle. Une nouvelle méthode de transformations de jauges permettant de simplifier le problème linéaire associé à ces surfaces est présentée. Cette méthode fait appel à la théorie des groupes et des algèbres de Lie et permet de réduire un système d'équations aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire linéaire homogène du second ordre. Une analyse détaillée est effectuée par la résolution du problème linéaire associé aux fonctions spéciales considérées. Les matrices de potentiel et la fonction d'onde satisfaisant le problème linéaire sont présentées. Pour chaque surface, la représentation d'Enneper-Weierstrass pour l'immersion de surfaces minimales dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 est donnée de manière explicite. Une description quaternionique des surfaces est effectuée, menant à la considération de surfaces minimales plongées dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$. À cet effet, la formule d'immersion de type Sym-Tafel est présentée. L'immersion de surfaces dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$ de courbure prescrite λ est considérée et les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi sont détaillées pour les surfaces de courbure moyenne constante $H = \lambda$. Une image numérique des surfaces est présentée, ainsi qu'une impression 3D de la surface associée au polynôme de Gegenbauer. La théorie de Sturm-Liouville est abordée, accompagnée de diverses notions relatives aux espaces de Hilbert et à la théorie entourant les polynômes orthogonaux. La méthode de résolution des équations différentielles par les séries généralisées est détaillée, accompagnée d'une méthode d'approximation des solutions par développement asymptotique.

Mots-clés : Surfaces solitoniques, Systèmes intégrables, Surfaces minimales, Polynômes orthogonaux.

ABSTRACT

In this thesis, we use the soliton surface approach to build minimal surfaces associated with ten classical orthogonal polynomials : Legendre, Legendre associated, Bessel, Chebyshev of the first kind, Chebyshev of the second kind, Laguerre, Laguerre associated, Hermite, Gegenbauer and Jacobi. The Gauss-Weingarten and the Gauss-Mainardi-Codazzi equations are studied for surfaces with constant and zero mean curvature. A new method of gauge transformations is applied to the linear problem associated with the surfaces, using Lie algebra and group theory, leading to the reduction of a system of partial differential equations to a single linear homogeneous ordinary differential equation of the second order. A detailed analysis is performed by solving the linear problem associated with specific special functions. The potential matrices and the wavefunction solution of the linear problem are given. For each surface, the Enneper-Weierstrass representation for the immersion of minimal surfaces in the Euclidean space \mathbb{R}^3 is given explicitly. A quaternionic description of the surfaces is presented, leading to the consideration of surfaces immersed in the $\mathfrak{su}(2)$ Lie algebra. For this purpose, a Sym-Tafel type immersion formula is considered. The immersion of surfaces in the hyperbolic space $H^3(\lambda)$ with prescribed curvature λ is considered and the Gauss-Mainardi-Codazzi equations are detailed for constant mean curvature $H = \lambda$. A numerical image of each surface is presented, accompanied by a 3D printing of the surface associated with the Gegenbauer polynomial. The Sturm-Liouville theory is discussed, together with notions about Hilbert spaces and the theory related to orthogonal polynomials. The generalized series method for solving differential equations is presented, together with a method for approximating solutions using asymptotic series development.

Keywords : Soliton surfaces, Integrable systems, Minimal surfaces, Orthogonal polynomials.

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement mon directeur de recherche Alfred Michel Grundland pour son support tout au long de mon parcours à la maîtrise. J'ai eu un réel plaisir à partager cette passion pour les mathématiques au travers des débats et discussions.

Je remercie le Fonds de Recherche du Québec - Nature et Technologies, le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada, ainsi que l'Institut des Sciences Mathématiques pour le support financier qui a rendu ce projet possible.

Je remercie l'École d'ingénierie de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour la collaboration concernant l'impression d'un modèle 3D.

Merci à toi ma Douce, mon Amoureuse. Pour ton support, pour tout. D'être toi. Une fois de plus, nous avons su aligner nos chemins et vivre l'aventure intellectuelle à plein... C'est fou ce qu'une promenade sur De la Corniche peut mener loin.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 THÉORIE DE STURM-LIOUVILLE ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX	9
2.1 Théorie de Sturm-Liouville	9
2.1.1 Opérateur de Sturm-Liouville	9
2.1.2 Espaces de Hilbert	20
2.1.3 Polynômes orthogonaux et applications liées	28
2.1.4 EDOs classiques décrivant des polynômes orthogonaux	33
2.2 Développement d'une solution en série généralisée	34
2.2.1 Point ordinaire d'une EDO	34
2.2.2 Série généralisée	34
2.2.3 Existence de la solution	35
2.2.4 Méthode des séries généralisées	35
2.3 Développement asymptotique des solutions d'une EDO	38
2.3.1 Opérations admises	38
2.3.2 Développement asymptotique des solutions de l'équation de Bessel	39
CHAPITRE 3 THÉORIE DES SURFACES	43
3.1 Surfaces minimales et représentation d'Enneper-Weierstrass	43
3.1.1 Équations de Gauss-Weingarten, équations de Gauss-Mainardi-Codazzi et surface paramétrisée conformément dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3	44
3.1.2 Représentation d'Enneper-Weierstrass	46
3.2 Description quaternionique des surfaces	49
3.2.1 Formule explicite de la surface	52
3.2.2 Problème linéaire pour la représentation des surfaces minimales par des matrices de dimensions 2×2	54
3.3 Immersion des surfaces dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$	55
3.3.1 Spineurs et représentation des équations de Gauss-Weingarten par des matrices 2×2	56
3.3.2 Formule d'immersion	58
3.3.3 Surfaces à courbure moyenne constante CMC- λ	59
3.4 Approche par les surfaces solitoniques et problème spectral linéaire	60
3.4.1 Formule d'immersion pour les surfaces solitoniques	60

CHAPITRE 4	TRANSFORMATIONS DE JAUGES ET PROBLÈME LINÉAIRE SIMPLIFIÉ	65
4.1	Transformations de jauges des équations de Gauss-Weingarten	65
4.1.1	Méthode en cascade pour l'immersion des surfaces dans \mathbb{R}^3	66
4.1.2	Méthode en cascade pour l'immersion des surfaces dans $H^3(\lambda)$	72
4.2	EDO du second ordre découlant des surfaces CMC- λ	75
4.3	Méthode pour la résolution du problème linéaire et la détermination des surfaces solitoniques associées	76
4.4	Représentation d'une EDO du second ordre par un système d'ordre premier	78
CHAPITRE 5	SURFACES SOLITONIQUES ASSOCIÉES À DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX	83
5.1	Analyses de cas	83
5.1.1	Équation de Legendre	84
5.1.2	Équation de Legendre associée	90
5.1.3	Équation de Bessel	98
5.1.4	Équation de Chebyshev de première espèce	103
5.1.5	Équation de Chebyshev de seconde espèce	108
5.1.6	Équation de Laguerre	113
5.1.7	Équation de Laguerre associée	118
5.1.8	Équation d'Hermite	126
5.1.9	Équation de Gegenbauer	131
5.1.10	Équation de Jacobi	140
5.2	Condition de compatibilité entre la fonction d'onde et la matrice de potentiel	149
5.3	Formule explicite des fonctions méromorphes η et χ	153
CHAPITRE 6	CONCLUSION	157
CHAPITRE 7	ANNEXES	163
7.A	Sommaire des résultats du chapitre 5	163
7.B	Affichage numérique des surfaces	176
BIBLIOGRAPHIE	179

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 2.1	Relation de récurrence pour les polynômes orthogonaux 30
Tableau 2.2	Coefficients des EDOs décrivant des polynômes orthogonaux..... 33
Tableau 7.1	Sommaire : équation de Legendre164
Tableau 7.2	Sommaire : équation de Legendre associée165
Tableau 7.3	Sommaire : équation de Bessel167
Tableau 7.4	Sommaire : équation de Chebyshev168
Tableau 7.5	Sommaire : équation de Laguerre169
Tableau 7.6	Sommaire : équation de Laguerre associée170
Tableau 7.7	Sommaire : équation d’Hermite171
Tableau 7.8	Sommaire : équation de Gegenbauer172
Tableau 7.9	Sommaire : équation de Jacobi174

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 5.1	Représentation de l'équation de Legendre dans \mathbb{R}^3 89
Figure 5.2	Représentation de l'équation de Legendre associée dans \mathbb{R}^3 98
Figure 5.3	Représentation de l'équation de Bessel dans \mathbb{R}^3 , $\theta \in [0, \pi]$ 103
Figure 5.4	Représentation de l'équation de Bessel dans \mathbb{R}^3 , $\theta \in [0, 2\pi]$ 103
Figure 5.5	Représentation de l'équation de Chebyshev dans \mathbb{R}^3 108
Figure 5.6	Représentation de l'équation de Laguerre dans \mathbb{R}^3 118
Figure 5.7	Représentation de l'équation de Laguerre associée dans \mathbb{R}^3 126
Figure 5.8	Représentation de l'équation d'Hermite dans \mathbb{R}^3 131
Figure 5.9	Représentation de l'équation de Gegenbauer dans \mathbb{R}^3 138
Figure 5.10	Impression 3D de la représentation de l'équation de Gegenbauer. 139
Figure 5.11	Représentation de l'équation de Jacobi dans \mathbb{R}^3 149

LISTE DES SYMBOLES

η, χ	Fonctions méromorphes de la représentation d'Enneper-Weierstrass
\mathcal{U}, \mathcal{V}	Matrices de potentiel du problème linéaire
Φ, Ψ	Fonctions d'onde du problème linéaire
Φ_j	Fonctions d'onde modifiées du problème linéaire
Ψ_j	Composantes de la fonctions d'onde du problème linéaire
λ	Paramètre spectral du problème linéaire
α, β	Paramètres d'équations différentielles ordinaires
θ	Argument principal d'un nombre complexe
σ_α	Matrices de Pauli
σ	Repère mobile sur la surface
δ	Delta de Kroenecker
Δ	Équation différentielle ordinaire du second ordre
γ	Constante d'Euler-Mascheroni
π	Constante pi
ω	Variable dépendante d'une équation différentielle
ε	Symbole de Levi-Civita
v_j	Paramètre d'une fonction quelconque
e	Nombre népérien
H	Courbure moyenne
m, n	Paramètres d'équations différentielles
M_j	Jauge élément d'un groupe de Lie
N	Normale à la surface
Q	Coefficient du différentiel de Hopf
p, q, r	Coefficients variés d'une équation différentielle
$(x)_n$	Symbole de Pochhammer
F	Représentation d'Enneper-Weierstrass de la surface dans \mathbb{R}^3
F_j	Composantes de la représentation d'Enneper-Weierstrass dans \mathbb{R}^3
\tilde{F}	Description quaternionique de la surface dans $\mathfrak{su}(2)$
\tilde{F}_{ij}	Composantes de la description quaternionique de la surface dans $\mathfrak{su}(2)$
F^{ST}	Formule d'immerion des surfaces de Sym-Tafel
F^σ	Formule d'immersion des surfaces dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$.
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels

\mathbb{Z}	Ensemble des entiers
\mathbb{E}^3	Espace euclidien
\mathbb{K}	Corps quelconque
\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
\mathbb{H}	Corps des quaternions
$\text{Im}\mathbb{H}$	Espace des quaternions imaginaires
\mathbb{H}_*	Groupe multiplicatif des quaternions
$H^3(\lambda)$	Espace hyperbolique de courbure prescrite λ
$M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$	Espace vectoriel des matrices d'ordre 2 sur un corps \mathbb{K}
\mathfrak{g}	Algèbre de Lie quelconque
G	Groupe de Lie quelconque
$\mathfrak{su}(N)$	Algèbre de Lie spéciale unitaire de dimension N
$SU(N)$	Groupe de Lie spécial unitaire de dimension N
$\mathfrak{sl}(N, \mathbb{K})$	Algèbre de Lie spéciale linéaire de dimension N sur le corps \mathbb{K}
$SL(N, \mathbb{K})$	Groupe de Lie spécial unitaire de dimension N sur le corps \mathbb{K}
$\mathfrak{so}(N)$	Algèbre de Lie spéciale orthogonale de dimension N
$SO(N)$	Groupe de Lie spéciale orthogonale de dimension N
$\mathfrak{so}(3, 1)$	Algèbre de Lorentz
$SO(3, 1)$	Groupe de Lorentz
z, \bar{z}, ξ	Variables complexes
ξ_0	Borne d'intégration inf. de la représentation d'Enneper-Weierstrass
c_j	Constantes d'intégration liées aux fonctions méromorphes η et χ
k_j	Constantes d'intégration liées à la solution d'une équation différentielle
∂	Dérivation par rapport à la variable complexe z
$\bar{\partial}$	Dérivation par rapport à la variable complexe conjuguée \bar{z}
∂_{x_j}	Dérivation par rapport à la variable réelle x_j
$[\cdot, \cdot]$	Crochet de Lie
A^\dagger	Transposée conjuguée de la matrice A
A^*	Complexe conjugué de A
\bar{A}	Complexe conjugué de A
$Tr(\cdot)$	Trace
$dim(\cdot)$	Dimension
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Produit scalaire

\Re	Partie réelle d'un nombre complexe
\Im	Partie imaginaire d'un nombre complexe
\square	Fin de la preuve mathématique ou de l'exemple
\log	Logarithme naturel
erf	Fonction d'erreur
H_n	Polynôme d'Hermite d'ordre n
\mathcal{J}_p	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre p
\mathcal{Y}_p	Fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre p
Γ	Fonction Gamma d'Euler
$\Gamma(v, z)$	Fonction Gamma incomplète
P_α	Polynôme de Legendre de première espèce d'ordre α
Q_α	Polynôme de Legendre de deuxième espèce d'ordre α
P_α^m	Polynôme de Legendre ass. de première espèce d'ordre α et de degré m
Q_α^m	Polynôme de Legendre ass. de deuxième espèce d'ordre α et de degré m
L_α	Polynôme de Laguerre d'ordre α
L_α^n	Polynôme de Laguerre associé d'ordre α et de degré n
T_n	Polynôme de Chebyshev de première espèce d'ordre n
U_n	Polynôme de Chebyshev de seconde espèce d'ordre n et de degré α
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	Polynôme de Jacobi d'ordre n et de paramètres (α, β)
${}_pF_q$	Fonction hypergéométrique de première espèce de paramètres (p, q)
${}_p\tilde{F}_q$	Fonction hypergéométrique régularisée de paramètres (p, q)
U	Fonction hypergéométrique de deuxième espèce
Li_n	Fonction polylogarithmique d'ordre n
Ei	Exponentielle intégrale

LISTE DES ABBRÉVIATIONS

CMC	Courbure moyenne constante
EDO	Équation différentielle ordinaire
FIST	Formule d'immersion de Sym-Tafel
GMC	Gauss-Mainardi-Codazzi
GW	Gauss-Weingarten
PO	Polynômes orthogonaux
PL	Problème linéaire
PSL	Problème spectral linéaire

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le but de ce mémoire est de construire une forme explicite des surfaces minimales associées à différents polynômes orthogonaux (**PO**) classiques, plongées dans des espaces multidimensionnels. Une surface F peut être décrite en terme du repère mobile $\sigma = (\partial F, \bar{\partial} F, N)^T$ sur cette même surface. Ce repère est soumis aux équations de Gauss-Weingarten et ces équations peuvent être formulées comme un système matriciel d'équations différentielles linéaires pour le repère mobile σ sur la surface F , nommé problème linéaire (**PL**)

$$\partial \sigma = \mathcal{U} \sigma, \quad \bar{\partial} \sigma = \mathcal{V} \sigma. \quad (1.1)$$

L'idée de construire des surfaces par la solution de systèmes linéaires est d'ailleurs «une idée classique de la géométrie différentielle» [19]. Nous posons les hypothèses découlant d'un contexte où les surfaces possèdent une courbure moyenne constante. En particulier, nous nous intéressons aux surfaces minimales [11; 27] (de courbure moyenne nulle $H = 0$) plongées dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$.

Les matrices $\mathcal{U}(u, H, Q)$ et $\mathcal{V}(u, H, Q)$ sont les matrices de potentiel du **PL** (1.1) et sont soumises aux équations de Gauss-Mainardi-Codazzi pouvant être formulées comme une condition de compatibilité de la forme

$$\bar{\partial} \mathcal{U} - \partial \mathcal{V} + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0. \quad (1.2)$$

Un triplet (u, H, Q) doit satisfaire la relation (1.2), où $u(z, \bar{z})$ est une fonction à valeur réelle caractérisant la surface, $H(z, \bar{z})$ est la courbure moyenne de la surface et $Q(z, \bar{z})$ est le coefficient du différentiel de Hopf associé à la surface. Nous considérons donc le **PL** (1.1) associé aux surfaces, ainsi que la condition de compatibilité (1.2) entre les matrices de potentiel apparaissant dans ce système, *i.e.* que les équations de Gauss-Weingarten liées au repère mobile sur la surface et les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi sont étudiées. Il est connu que dans

l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , une courbure moyenne constante nulle ($H = 0$) entraîne une réduction des équations de Gauss-Mainardi-Codazzi à une équation différentiel de type Liouville. Nous étudions donc les cas des équations de Gauss-Mainardi-Codazzi associées à des surfaces plongées dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$ ayant une courbure moyenne constante $H = \lambda$, pour fins de comparaison.

Différentes approches existent pour l'immersion des surfaces. Parmi les approches directes, nous nous intéressons à la représentation d'Enneper-Weierstrass pour l'immersion de surfaces minimales dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 formulée dans [17; 19; 20; 27]. Mentionnons que Weierstrass et Enneper ont été les premiers à présenter une telle formule d'immersion (vers 1860). Pour des coordonnées complexe et complexe conjuguée (z, \bar{z}) , cette formule est composée de deux fonctions arbitraires méromorphes $\eta(z)$ et $\chi(z)$ et s'écrit

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} (1 - \chi^2, i(1 + \chi^2), 2\chi)^T \cdot \eta^2 dz \right) \in \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

Nous utilisons la description quaternionique des surfaces proposée dans [6; 7] pour étudier les surfaces plongées dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) \sim \mathbb{R}^3$. Une formule d'immersion sous la forme d'une matrice de dimensions 2×2 est ainsi donnée, en termes des deux fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass. L'un des objectifs de cette étude est d'explorer le lien entre la formule d'immersion des surfaces d'Enneper-Weierstrass (1.3) et le **PL** (1.1) associé à des surfaces minimales. Les équations de Gauss-Weingarten, lorsque formulées par un problème spectral linéaire (PSL), forment une paire de Lax. Nous présentons une méthode algorithmique permettant de simplifier le **PL** en faisant appel aux transformations de jagues et à la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Ces transformations de jagues successives doivent permettre de simplifier les équations de Gauss-Weingarten formulées comme un **PL**. Cette simplification vise la résolution du **PL** et l'application de la formule d'immersion de type Sym-Tafel [30; 31; 12]

$$F^{ST}(\lambda; x, y) = \Psi^{-1}(\lambda; x, y) \partial_{\lambda} \Psi(\lambda; x, y) \in \mathfrak{g} \quad (1.4)$$

pour construire les surfaces correspondantes à partir de la fonction d'onde Ψ solutionnant le **PL** (voir le théorème 3.4.1). Les transformations de jauge appliquées au **PL** font appel à des notions de la théorie des groupes et permettent d'introduire dans le problème les deux fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass et un paramètre jouant le rôle de paramètre libre, que nous pouvons interpréter dans certains cas comme un paramètre spectral du **PL**.

L'application de la représentation (1.4) fait appel à la théorie des groupes, mais est fondamentalement équivalente à la représentation (1.3). Nous considérons le même objet, dans des espaces différents (structures algébriques abstraites). Le **PL** peut être formulé par une équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire homogène du second ordre, ayant des coefficients variés s'exprimant en termes des deux fonctions arbitraires holomorphes de la représentation d'Enneper-Weierstrass [12]. Nous étudions donc le lien entre le **PL** et les polynômes orthogonaux. Cette formulation simplifiée des équations de Gauss-Weingarten mène à l'objectif principal de cette étude : construire une forme explicite des surfaces solitoniques associées à différents **PO** classiques. Cette famille de surfaces est paramétrisée par le paramètre spectral λ associé au **PL** simplifié. Les résultats motivant cet objectif sont liées à la forme simplifiée du **PL** obtenue par transformations de jauge. En effet, les équations de Gauss-Weingarten sont alors formulées comme une EDO linéaire homogène du second ordre. Les fonctions spéciales apparaissent dans de nombreux problèmes physiques et mathématiques, et les **PO** forment une classe de fonctions spéciales largement étudiées [1; 9; 26]. Plusieurs de ces polynômes sont solution d'une EDO linéaire homogène du second ordre pouvant être formulée comme un problème de Sturm-Liouville. Il est donc naturel d'effectuer une association entre l'EDO décrivant le **PL** simplifié et différentes EDOs fixées pour un **PO** donné. Ce faisant, nous sommes en mesure de déterminer les fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass tout en solutionnant le **PL** associé aux **PO** considérés, soient les solutions particulières associées aux équations de Legendre, Legendre associée, Bessel, Chebyshev de première espèce, Chebyshev de seconde espèce, Laguerre, Laguerre associée, Hermite, Gegenbauer et Jacobi. La forme explicite de la surface plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ est donnée, accompagnée d'une image de la surface dans \mathbb{R}^3 . Nous présentons à la figure 5.10 une

impression 3D de la surface associée aux polynômes de Gegenbauer.

Une motivation justifiant cette recherche est de caractériser les surfaces minimales obtenues par l'approche des surfaces solitoniques associées aux **PO**, *i.e.* les surfaces associées à une classe spécifique de fonctions, elles-mêmes liées par des propriétés dont nous discutons au chapitre 2. Par exemple, les **PO** sont associés à une EDO linéaire homogène du second ordre pouvant être formulée comme un problème aux conditions frontières de Sturm-Liouville, soit un problème de fonctions propres et de valeurs propres (spectre de l'EDO). Chaque famille de **PO** forme un système orthogonal complet dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et ces différentes familles possèdent de nombreuses propriétés de récurrence de même nature. De plus, les **PO** sont liés entre eux par des relations algébriques et différentielles, et possèdent diverses représentations dont la forme et l'existence dépend des paramètres de la fonction et du domaine considéré.

Nous discutons de la forme prise par les surfaces lorsque programmées dans un logiciel de calcul symbolique. Nous posons l'hypothèse que cette forme est liée à l'équation différentielle de type Sturm-Liouville décrivant ces polynômes. Fondamentalement, une EDO décrit le comportement de sa solution. L'expression mathématique des surfaces est-elle clairement identifiable à ces solutions ? Autrement dit, la solution du **PL** et la forme explicite des surfaces décrivant une classe particulière de polynômes orthogonaux s'exprime-t-elle en termes de ces polynômes ? Dans la mesure où ce serait le cas, nous posons l'hypothèse qu'il serait alors possible d'utiliser les propriétés de récurrence et les relations différentielles propres à ces polynômes pour simplifier l'expression obtenue.

Est-il possible d'exprimer ces surfaces par une forme purement algébrique (explicite), et non différentielle ou intégrale ? Cette question émerge du fait que la formule d'immersion d'Enneper-Weierstrass pour les surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 est une représentation intégrale. Cette intégrale possède-t-elle une primitive, et sommes-nous en mesure de la déterminer explicitement ou devons-nous procéder par approximation ? Une telle démarche a été initiée dans [12] pour le cas spécifique des surfaces associées à la fonction d'erreur plongée dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$ et dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Les résultats qui y sont présentés nous portent à croire qu'une représentation explicite des surfaces peut être obtenue, et si tel est le

cas, cela faciliterait la programmation de telles équations pour l'obtention d'une représentation tridimensionnelle (imagerie numérique). Ces représentations numériques sont importantes, tout comme le développement de méthodes numériques pour la visualisation de formules mathématiques. En effet, une image visuelle d'une surface reflétant le comportement de sa solution est d'intérêt, car elle donne des indices à propos de propriétés de ces surfaces qui seraient autrement cachées dans des expressions mathématiques implicites.

Plan du mémoire

Le chapitre 2 présente la théorie de Sturm-Liouville et les polynômes orthogonaux. La section 2.1 traite des propriétés de l'opérateur différentiel de Sturm-Liouville et de la forme du problème aux conditions frontières de Sturm-Liouville. La théorie des espaces de Hilbert est abordée à partir de résultats présentés dans [2; 23; 45], accompagnée par un exemple d'application aux états cohérents généralisés tiré de [35]. La section 2.1.3 traite des polynômes orthogonaux à partir de résultats présentés dans [1; 3; 16; 26; 28]. Une applications des polynômes d'Hermite à l'équation de Schrödinger indépendante du temps provenant de [35] est détaillée dans l'exemple 2.1.6. Dans la section 2.2, nous traitons de la résolution des EDOs par le développement en séries généralisées des solutions, notions appliquées à l'équation de Bessel dans l'exemple 2.2.1. Le chapitre 2 se termine par la section 2.3 où est présentée une méthode d'approximation des solutions nommée *Développement asymptotique des solutions d'une EDO*, accompagnée d'un exemple détaillé.

Le chapitre 3 traite de la théorie des surfaces. Dans la section 3.1, nous définissons les équations de Gauss-Weingarten, les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi et la formule d'Enneper-Weierstrass associées à des surfaces minimales plongées dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . La section 3.2 reprend divers résultats présentés dans [6; 7] afin d'établir une description des surfaces et du **PL** associé en termes de matrices de dimension 2×2 . L'immersion de surfaces dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$ y est abordé. Finalement, la section 3.4 traite de l'approche par les surfaces solitoniques et du **PL** associé à de telles familles de surfaces. La formule d'immersion de type Sym-Tafel est présentée [30; 31].

Le chapitre 4 présente une nouvelle méthode de transformations de jauges des équations de Gauss-Weingarten. Nous y expliquons les conséquences d'une telle simplification et de l'exploitation du lien entre le **PL** et la représentation d'Enneper-Weierstrass. Une méthode algorithmique est détaillée dans la section 4.1.1. Dans la section 4.2, nous effectuons une sélection de surfaces de courbure moyenne constante λ et présentons l'EDO découlant de cette sélection. Nous expliquons dans la section 4.3 une approche par étapes pour la résolution du **PL** et la détermination de la forme explicite des surfaces associées, approche reprise au chapitre 5 afin d'effectuer une dizaine d'analyses de cas. La section 4.4 explore la possibilité d'exprimer le **PL** sous une forme équivalente où la fonction d'onde est isolée, exploration motivée par le fait que toute EDO linéaire homogène du second ordre peut s'exprimer comme un système d'ordre premier.

Nous présentons, dans le chapitre 5, les résultats découlant de l'analyse de dix équations différentielles classiques (sections 5.1.1 à 5.1.10). Nous y appliquons l'approche par étapes présentée dans la section 4.3 afin de simultanément résoudre le **PL** associé aux équations de Gauss-Weingarten et déterminer la forme explicite des surfaces solitoniques associées aux polynômes orthogonaux. Dans chaque cas, une image tridimensionnelle de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 est présentée. Dans la section 5.2, nous reprenons chaque analyse de cas et vérifions que la compatibilité entre la matrice de potentiel et la fonction d'onde calculées est satisfaite. Cette section motive empiriquement l'établissement de formules explicite pour les fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass, en termes des coefficients de l'équation différentielle considérée (voir la liste ci-haut mentionnée). Ces formules sont démontrées dans la section 5.3, où est exploité le lien différentiel entre les composantes de la fonction d'onde solutionnant le **PL**.

Le chapitre 6 présente les conclusions de cette étude, les réponses aux questions ci-haut formulées, ainsi que les perspectives de recherches futures.

Le chapitre 7 comprend deux annexes. La première est une synthèse des résultats présentés dans les dix analyses de cas du chapitre 5, sous forme de tables. Celles-ci comprennent les fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass, la forme explicite de la famille de surfaces ainsi que la fonction d'onde et la matrice de potentiel solutionnant le **PL** associé.

La deuxième annexe consiste en un code Mathematica permettant de générer une image tridimensionnelle d'une surface plongée dans \mathbb{R}^3 .

CHAPITRE 2

THÉORIE DE STURM-LIOUVILLE ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Nous présentons dans ce chapitre les notions de base de la théorie de Sturm-Liouville nécessaires à l'étude des équations différentielles considérées dans le chapitre 5. Nous abordons ensuite la généralisation de la méthode de Frobenius pour la résolution des EDOs, nommée *méthode par les séries généralisées*. Nous concluons en détaillant une méthode d'approximation des solutions par développement asymptotique.

2.1 Théorie de Sturm-Liouville

Nous construisons au chapitre 5 les familles de surfaces solitoniques associées à divers polynômes orthogonaux classiques. Ces polynômes sont solution d'un problème de Sturm-Liouville aux conditions frontières qualifié de *problème de valeurs propres et de fonctions propres associées*. Ces familles de surfaces sont une représentation du comportement des polynômes orthogonaux considérés. Il est donc pertinent de discuter des résultats élémentaires de la théorie de Sturm-Liouville entourant les polynômes orthogonaux que nous souhaitons décrire.

2.1.1 Opérateur de Sturm-Liouville

Le problème de Sturm-Liouville est un problème différentiel soumis à des conditions frontières dont on doit déterminer le spectre, soit l'ensemble des valeurs propres, ainsi que l'ensemble des fonctions propres associées à celles-ci. L'opérateur de Sturm-Liouville

$$\mathcal{D} := \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} - q(x) \quad (2.1)$$

est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 défini par les fonctions $p(x)$ et $q(x)$. L'équation aux valeurs propres d'un système basé sur le poids $\rho(x) > 0$ prends la forme $(\mathcal{D} + \lambda \rho) \omega(x) = 0$, *i.e.*

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\omega}{dx} \right) - q(x) \omega(x) + \lambda \rho(x) \omega(x) = 0. \quad (2.2)$$

Nous remarquons que les zéros de $p(x)$ sont des points singuliers de l'équation différentielle. Pour $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, l'équation (2.2) est soumise à des conditions frontières décrites en termes de la fonction ω et/ou de sa dérivée, évaluées aux points frontière a et b . Le problème de Sturm-Liouville régulier consiste à trouver un ensemble de valeurs propres discrètes $\{\lambda_n\}$ et un ensemble de fonctions propres associées $\{\omega_n\}$ qui solutionnent (2.2) et satisfont les conditions frontières. Celles-ci peuvent prendre différentes formes. Par exemple, les conditions de Dirichlet sont de la forme $\omega(a) = \omega(b) = 0$ et les conditions de Neumann prennent la forme $\omega'(a) = \omega'(b) = 0$, alors que des conditions périodiques sont de la forme $\omega(a) = \omega(b)$, $\omega'(a) = \omega'(b)$. En général, les conditions frontières peuvent s'énoncer

$$\begin{aligned}\alpha_0 \omega(a) + \alpha_1 \omega'(a) &= 0 \\ \beta_0 \omega(b) + \beta_1 \omega'(b) &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$. Le problème de Sturm-Liouville est qualifié de singulier lorsque les coefficients du problème possèdent des singularités aux points frontières de l'intervalle considéré. Le spectre peut alors être continu et l'ensemble des fonctions propres ne serait alors plus dénombrable.

Des fonctions propres f et g réelles seront considérées comme des éléments d'un espace de Hilbert réel \mathcal{H} par rapport au produit scalaire

$$\langle f | g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx = \langle g | f \rangle.\tag{2.4}$$

Des fonctions complexes seront considérées comme des éléments d'un espace de Hilbert complexe \mathcal{H} par rapport au produit scalaire

$$\langle f | g \rangle := \int_a^b f^*(x)g(x) dx = \langle g | f \rangle^*,\tag{2.5}$$

où $*$ désigne le complexe conjugué de l'expression considérée.

Definition 2.1. Deux fonctions propres sont dites orthogonales sur (a, b) par rapport au poids $\rho(x) > 0$ si

$$\langle f | \rho | g \rangle := \int_a^b f(x) \rho(x) g(x) dx = 0$$

(resp.)

$$\langle f | \rho | g \rangle := \int_a^b f^*(x) \rho(x) g(x) dx = 0. \quad (2.6)$$

Definition 2.2. Un opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} est auto-adjoint si

$$\langle f | \mathcal{L} | g \rangle = \langle g | \mathcal{L} | f \rangle \Leftrightarrow \int_a^b f(x) \mathcal{L}(g(x)) dx = \int_a^b g(x) \mathcal{L}(f(x)) dx$$

(resp.)

$$\langle f | \mathcal{L} | g \rangle = \langle g | \mathcal{L} | f \rangle^* \Leftrightarrow \int_a^b f^*(x) \mathcal{L}(g(x)) dx = \left(\int_a^b g^*(x) \mathcal{L}(f(x)) dx = 0 \right)^*. \quad (2.7)$$

L'opérateur de Sturm-Liouville (2.1) est un cas particulier d'opérateur auto-adjoint [16]. Ces opérateurs sont soumis à des conditions frontières pouvant s'énoncer généralement en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral. En effet, si p et q sont des fonctions réelles et si f et g sont lisses, alors

$$g^*(x) \mathcal{D}(f(x)) = g^* \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) - g^*(x) q(x) f(x)$$

$$f^*(x) \mathcal{D}(g(x)) = f^* \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{dx} \right) - f^*(x) q(x) g(x)$$

et en intégrant de chaque côté,

$$\begin{aligned} \int_a^b g^*(x) \mathcal{D}(f(x)) dx &= \int_a^b g^* \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) dx - \int_a^b g^*(x) q(x) f(x) dx \\ \int_a^b f^*(x) \mathcal{D}(g(x)) dx &= \int_a^b f^* \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{dx} \right) dx - \int_a^b f^*(x) q(x) g(x) dx \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \int_a^b g^*(x) \mathcal{D}(f(x)) dx &= \int_a^b g^* \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) dx - \int_a^b g^*(x) q(x) f(x) dx \\ \left(\int_a^b f^*(x) \mathcal{D}(g(x)) dx \right)^* &= \left(\int_a^b f^* \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{dx} \right) dx \right)^* - \left(\int_a^b f^*(x) q(x) g(x) dx \right)^*. \end{aligned}$$

Or, par les propriétés d'un espace de hilbert complexe,

$$\left(\int_a^b f^*(x) q(x) g(x) dx \right)^* = \langle f | qg \rangle^* = \langle qg | f \rangle = \int_a^b g^*(x) q(x) f(x) dx$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b g^*(x) \mathcal{D}(f(x)) dx - \left(\int_a^b f^*(x) \mathcal{D}(g(x)) dx \right)^* \\ = \underbrace{\int_a^b g^* \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) dx}_A - \underbrace{\left(\int_a^b f^* \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{dx} \right) dx \right)^*}_B. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En intégrant par parties les termes du côté droit de l'égalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b g^* \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f^*(x) p(x) \frac{dg}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dg}{dx} p(x) \frac{df^*}{dx} dx \\ B &= \left(\int_a^b f^* \frac{d}{dx} \left(\frac{dg}{dx} \right) dx \right)^* = g(x) p(x) \frac{df^*}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dg}{dx} p(x) \frac{df^*}{dx} dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En substituant (2.9) dans (2.8), l'équation devient

$$\int_a^b g^*(x) \mathcal{D}(f(x)) dx - \left(\int_a^b f^*(x) \mathcal{D}(g(x)) dx \right)^* = f^*(x) p(x) \frac{dg}{dx} \Big|_a^b - g(x) p(x) \frac{df^*}{dx} \Big|_a^b$$

ce qui est équivalent à

$$\langle g | \mathcal{D} | f \rangle - \langle f | \mathcal{D} | g \rangle^* = f^*(x) p(x) \frac{dg}{dx} \Big|_a^b - g(x) p(x) \frac{df^*}{dx} \Big|_a^b$$

et puisque \mathcal{D} est auto-adjoint, alors

$$f^*(x)p(x)\frac{dg}{dx}\Big|_a^b = g(x)p(x)\frac{df^*}{dx}\Big|_a^b$$

et les conditions frontières s'énoncent donc

$$p(b) (f^*(b)g'(b) - g(b)f'(b)^*) = p(a) (f^*(a)g'(a) - g(a)f'(a)^*). \quad (2.10)$$

Théorème 2.1.1. [16]. *Le spectre du problème de Sturm-Liouville régulier (2.2) est réel. De plus, pour $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega_m \perp \omega_n$, i.e. que les fonctions ω_m et ω_n sont orthogonales sur (a, b) par rapport au poids $\rho(x) > 0$.*

Démonstration. Soient m, n deux entiers positifs fixés et (λ_m, ω_m) , (λ_n, ω_n) les solutions associées. Alors,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + \lambda_m \rho) \omega_m(x) &= 0 \\ (\mathcal{D} + \lambda_n \rho) \omega_n(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \omega_n^*(x) \mathcal{D} \omega_m(x) &= -\lambda_m \omega_n^*(x) \rho(x) \omega_m(x) \\ \omega_m^*(x) \mathcal{D} \omega_n(x) &= -\lambda_n \omega_m^*(x) \rho(x) \omega_n(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

et en intégrant de chaque côté et en prenant le complexe conjugué de la deuxième équation,

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega_n^*(x) \mathcal{D} \omega_m(x) dx &= -\lambda_m \int_a^b \omega_n^*(x) \rho(x) \omega_m(x) dx \\ \left(\int_a^b \omega_m^*(x) \mathcal{D} \omega_n(x) dx \right)^* &= -\lambda_n^* \left(\int_a^b \omega_m^*(x) \rho(x) \omega_n(x) dx \right)^* \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b \omega_n^*(x) \mathcal{D} \omega_m(x) dx - \left(\int_a^b \omega_m^*(x) \mathcal{D} \omega_n(x) dx \right)^* \\ = -\lambda_m \int_a^b \omega_n^*(x) \rho(x) \omega_m(x) dx + \lambda_n^* \left(\int_a^b \omega_m^*(x) \rho(x) \omega_n(x) dx \right)^* \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow \langle \omega_n | \mathcal{D} | \omega_m \rangle - \langle \omega_m | \mathcal{D} | \omega_n \rangle = -\lambda_m \langle \omega_n | \rho | \omega_m \rangle + \lambda_n^* \langle \omega_m | \rho | \omega_n \rangle^* \quad (2.15)$$

et puisque \mathcal{D} est auto-adjoint et que les propriétés d'un espace de Hilbert complexe impliquent pour $\rho > 0$ que $\langle \omega_n | \rho | \omega_m \rangle = \langle \omega_m | \rho | \omega_n \rangle^*$, alors

$$(\lambda_n^* - \lambda_m) \langle \omega_n | \rho | \omega_m \rangle = 0. \quad (2.16)$$

Supposons que $m = n$. Alors, $\langle \omega_n | \rho | \omega_m \rangle > 0$ pour tout n et pour toute fonction propre $\omega_n \neq 0$,

$$\lambda_n^* = \lambda_n \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

L'entier positif n étant quelconque, nous concluons que le spectre discret du problème de Sturm-Liouville régulier est réel. D'un autre côté, si $m \neq n$ et $\lambda_m \neq \lambda_n$, alors

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \omega_n | \rho | \omega_m \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \omega_n | \rho | \omega_m \rangle = 0, \quad (2.18)$$

ce qui signifie que les fonctions ω_m et ω_n sont orthogonales sur (a, b) par rapport au poids $\rho(x) > 0$. Supposons qu'il existe r fonctions propres $\{u_i\}_{i=1}^r$ linéairement indépendantes associées à la même valeur propre λ_j . L'indépendance linéaire peut être vérifiée par l'évaluation du Wronskien associé à ces fonctions et la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut alors être appliquée afin de former r nouvelles solutions orthogonales deux à deux, ainsi que r nouvelles valeurs propres associées, en posant

$$\tilde{\omega}_1 = u_1, \quad \tilde{\omega}_{i+1} = u_{i+1} - \sum_{s=1}^i \frac{\langle \tilde{\omega}_s | \rho | u_{i+1} \rangle}{\langle \tilde{\omega}_s | \rho | \tilde{\omega}_s \rangle} \tilde{\omega}_s, \quad \lambda_i = -\frac{\langle \tilde{\omega}_i | \mathcal{D} | \tilde{\omega}_i \rangle}{\langle \tilde{\omega}_i | \rho | \tilde{\omega}_i \rangle}. \quad (2.19)$$

□

Les valeurs propres $\{\lambda_n\}$ sont discrètes, bornées inférieurement et en évitant les répétitions, forment une suite monotone strictement croissante

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad (2.20)$$

Definition 2.3. Un ensemble $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ orthogonal sur (a, b) par rapport au poids $\rho(x) > 0$ est complet [38] sur $[a, b]$ si pour toute fonction f lisse sur $[a, b]$, l'estimateur quadratique E_n est tel que

$$E_n := \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right)^2 \rho(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Exemple 2.1.1. Les polynômes de Laguerre d'ordre n et de degré α décrits en termes de la formule de Rodrigues [1]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n \geq 0, \alpha > -1, \quad (2.22)$$

forment un système orthogonal complet dans l'espace de Sobolev $L^2(x^\alpha e^{-x}, \mathbb{R}^+)$ (espace de Hilbert) sur l'intervalle $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ par rapport au poids $\rho(x) = x^\alpha e^{-x} > 0$ [29]. Ces polynômes orthogonaux sont les fonctions propres associées aux valeurs propres $\{\lambda_n = n\}_{n=0}^\infty$ du problème

$$x^{-\alpha} e^x \frac{d}{dx} \left(x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{d\omega}{dx} \right) + \lambda \omega(x) = 0 \quad (2.23)$$

et l'orthogonalité est vérifiée par

$$\left\langle L_m^{(\alpha)}(x) \middle| x^\alpha e^{-x} \middle| L_n^{(\alpha)}(x) \right\rangle = \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{m,n}. \quad (2.24)$$

Exemple 2.1.2. Nous souhaitons trouver les valeurs propres et fonctions propres associées du problème aux valeurs frontières

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad 1 < x < e, \quad (2.25)$$

$$y(1) = 0, \quad y(e) = 0. \quad (2.26)$$

Nous reformulons le problème sous la forme d'un problème de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad 1 < x < e. \quad (2.27)$$

L'hypothèse $\lambda = 0$ mène à une solution triviale. Supposons que $\lambda \neq 0$ et posons $\lambda = \mu^2$. L'équation (2.25) est de type Euler-Cauchy homogène ayant comme solution

$$y(t) = c_3 e^{i\mu t} + c_4 e^{-i\mu t}. \quad (2.28)$$

La solution trouvée est soumise aux conditions frontières menant à la résolution du système homogène.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\mu} & e^{-i\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

possédant une solution non-triviale ssi

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\mu} & e^{-i\mu} \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-i\mu} - e^{i\mu} = 0. \quad (2.30)$$

Pour $\mu = a + ib \in \mathbb{C}$, l'étude des différents cas possibles générés par la condition (2.30) mène à la détermination des valeurs propres du problème

$$\mu_n = n\pi, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

Par les conditions frontières et en effectuant la transformation inverse $\log x = t$, les fonctions propres associées sont

$$\phi_n(x) = \sin(\log(x^{n\pi})), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Nous montrons l'orthogonalité du système sur l'intervalle $(1, e)$ par rapport au poids $\frac{1}{x} > 0$ $\forall x \in (1, e)$ par l'expression

$$\int_1^e \sin(m\pi \log x) \sin(n\pi \log x) \frac{1}{x} dx = \begin{cases} 1/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}. \quad (2.33)$$

Lemme 2.1.1. *Transformation d'une EDO pour l'obtention de la forme de Sturm-Liouville.*
Toute EDO linéaire homogène du second ordre de la forme

$$p(z) \frac{d^2 \omega}{dz^2} + q(z) \frac{d\omega}{dz} + r(z) \omega = 0 \quad (2.34)$$

où $p(z)$, $q(z)$ et $r(z)$ sont intégrables et où $p(z)$ possède un nombre fini de zéros, peut être ramenée à une formulation du problème de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dz} \left(P(z) \frac{d\omega}{dz} \right) + Q(z) \omega = \lambda \rho(z) \omega, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.35)$$

où $P(z)$ est différentiable.

Démonstration. La formulation de Sturm-Liouville est équivalente à

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \frac{1}{P(z)} \frac{dP}{dz} \frac{d\omega}{dz} + \frac{Q(z) - \lambda \rho(z)}{P(z)} \omega = 0. \quad (2.36)$$

Par identification des coefficients avec ceux de l'EDO (2.34), nous obtenons

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{1}{P(z)} \frac{dP}{dz}, \quad \frac{r(z)}{p(z)} = \frac{Q(z) - \lambda \rho(z)}{P(z)}. \quad (2.37)$$

$$\Leftrightarrow P(z) = c \exp \left\{ \int \frac{q(z)}{p(z)} dz \right\}, \quad (2.38)$$

$$Q(z) - \lambda \rho(z) = c \frac{r(z)}{p(z)} \exp \left\{ \int \frac{q(z)}{p(z)} dz \right\}, \quad c \in \mathbb{C}. \quad (2.39)$$

□

Exemple 2.1.3. L'équation de Bessel est de la forme

$$z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} (z^2 - p^2) \omega = 0, \quad p \in \mathbb{C} \quad (2.40)$$

et ainsi $p(z) = z^2$, $q(z) = z$ et $r(z) = z^2 - p^2$. Nous trouvons que

$$P(z) = c \text{Exp} \left\{ \int \frac{1}{z} dz \right\} = cz, \quad (2.41)$$

$$Q(z) - \lambda p(z) = c \frac{z^2 - p^2}{z} \text{Exp} \left\{ \int \frac{1}{z} dz \right\} = c(z^2 - p^2). \quad (2.42)$$

Posons $Q(z) = cz^2$, $\lambda = p^2$ et $p(z) = 1$. Alors le problème de Sturm-Liouville s'écrit

$$\frac{d}{dz} \left(cz \frac{d\omega}{dz} \right) + cz^2 \omega = p^2 \omega \quad (2.43)$$

$$\Leftrightarrow z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} + (z^2 - p^2) \omega = 0. \quad (2.44)$$

Lemme 2.1.2. *Transformation vers la forme standard [24].*

Toute EDO linéaire homogène d'ordre 2 de la forme

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} + a(x) \frac{d\omega}{dx} + b(x) \omega = 0, \quad x \in (a, b) \subset \mathbb{R} \quad (2.45)$$

se ramène à une forme standard

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) y = 0 \quad (2.46)$$

par les transformations

$$\frac{dA}{dx} = a(x), \quad y(x) = e^{1/2A(x)} \omega(x), \quad Q(x) = -\frac{1}{2} \frac{da}{dx} - \frac{1}{4} a(x)^2 + b(x). \quad (2.47)$$

Démonstration. Pour une équation de la forme

$$p(x) \frac{d^2 \omega}{dx^2} + q(x) \frac{d\omega}{dx} + r(x) \omega = 0, \quad (2.48)$$

les coefficients variés $a(x)$ et $b(x)$ s'expriment par les quotients

$$a(x) := \frac{q(x)}{p(x)}, \quad b(x) := \frac{r(x)}{p(x)}. \quad (2.49)$$

Les zéros de $p(x)$ sont des points singuliers de l'EDO (2.45), car ce sont des points singuliers de ses coefficients. Nous exigerons donc que $p(x)$ ait un nombre fini de zéros dans l'intervalle (a, b) afin que les points singuliers soient de type pôle. Supposons donc que $p, q \in \mathcal{R}[(a, b)]$ et $p, q \in C^1[(a, b)]$ afin d'assurer que $a(x)$ est dérivable et intégrable. Alors, par (2.47),

$$\frac{dA}{dx} = a(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = \int a(x) dx + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

et en substituant (2.50) dans l'équation pour $y(x)$ (2.47), nous obtenons

$$\begin{aligned} y(x) &:= e^{1/2A(x)} \omega(x) = \text{Exp} \left\{ 1/2 \left(\int a(x) dx + c \right) \right\} \omega(x) \\ \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} &= \text{Exp} \left\{ 1/2 \left(\int a(x) dx + c \right) \right\} \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} + a(x) \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{2} \frac{da}{dx} \omega(x) + \frac{1}{4} a^2(x) \omega(x) \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

et en substituant (2.51) dans (2.46), nous trouvons

$$\text{Exp} \left\{ 1/2 \left(\int a(x) dx + c \right) \right\} \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} + a(x) \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{2} \frac{da}{dx} \omega(x) + \frac{1}{4} a^2(x) \omega(x) \right) \quad (2.52)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} \frac{da}{dx} - \frac{1}{4} a(x)^2 + b(x) \right) \left(\text{Exp} \left\{ 1/2 \left(\int a(x) dx + c \right) \right\} \omega(x) \right) = 0 \quad (2.53)$$

et après simplification

$$\text{Exp} \left\{ 1/2 \left(\int a(x) dx + c \right) \right\} \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} + a(x) \frac{d\omega}{dx} + b(x) \omega = 0 \right). \quad (2.54)$$

Or, $e^{\alpha x} \neq 0 \forall \alpha, x \in \mathbb{R}$ donc la relation (2.54) est équivalente à la relation (2.45)

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} + a(x) \frac{d\omega}{dx} + b(x) \omega = 0, \quad (2.55)$$

qui est satisfaite par hypothèse. Les formes standard et canonique sont donc équivalentes.

Remarque. La forme standard peut être utilisée dans divers contextes, notamment pour le développement asymptotique des solutions tel qu'illustré dans l'exemple 2.3.1, où la transformation de l'EDO vers une forme standard permet le passage à une équation aux valeurs limites

à coefficients constants. Évidemment, si nous sommes en mesure de résoudre (2.46), alors nous sommes en mesure de déterminer la solution de l'équation canonique, par transformations, et vice-versa.

2.1.2 Espaces de Hilbert

Zeidler explique dans [45] que l'étude des espaces de Hilbert nécessite la considération de l'intégrale au sens de Lebesgue. En effet, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$, la relation par l'intégrale de Riemann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G u_n(x) dx = \int_G u(x) dx \quad (2.56)$$

ne serait vraie que sous certaines restrictions. Ainsi, l'intégrale au sens de Riemann dans un espace pré-hilbertien mènerait au fait que le critère de Cauchy pour la convergence des suites n'est pas toujours satisfait. Un espace pré-hilbertien généralise l'idée d'espace Euclidien ou d'espace Hermitien. S'il est de dimension finie, il n'est pas complet, *i.e.* il est faux que toute suite de Cauchy converge par rapport à la norme considérée, elle-même induite par un produit scalaire en particulier. Sinon, il peut être complété pour obtenir un espace de Hilbert. La notion d'orthogonalité y sera fondamentale et nous écrirons pour $u, v \in \mathcal{H}$, $u \perp v$ ssi $(u | v) = 0$. Le livre de Zeidler [45] porte sur l'analyse fonctionnelle et l'auteur explique que «[...] la justification fonctionnelle analytique du principe de Dirichlet est basée sur l'idée d'orthogonalité» et que «la théorie des espaces de Hilbert est la formulation abstraite et efficace de l'idée d'orthogonalité». Il s'agit donc du bon outil pour décrire les phénomènes de la physique quantique. La notion d'orthogonalité étant formulée efficacement dans ces espaces, il est naturel de les considérer pour la manipulation des polynômes orthogonaux (PO). Afin d'introduire la théorie des espaces de Hilbert, nous énumérons ici quelques définitions tirées de [45].

Proposition 2.1.1. *Tout espace pré-hilbertien X sur \mathbb{K} est aussi un espace normé sur \mathbb{K} par rapport à la norme*

$$\|u\| = (u | u)^{1/2} \quad \forall u \in X. \quad (2.57)$$

À partir de cette norme, nous citons l'inégalité de Schwarz entraînant le principe d'incertitude d'Heisenberg. La description de systèmes dans un contexte où les phénomènes considérés comportent des éléments infiniment petits sont soumis à ce principe d'incertitude faisant intervenir des modèles probabilistes. Le principe d'incertitude d'Heisenberg découle de l'inégalité de Schwarz.

Proposition 2.1.2. Inégalité de Schwarz

$$|(u | v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in X. \quad (2.58)$$

Définition 2.4. *Un espace de Hilbert \mathcal{H} est un espace pré-Hilbertien qui est un espace de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|$ induite par le produit scalaire défini, i.e. qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et dans lequel toute suite de Cauchy est convergente par rapport à la norme $\|\cdot\|$.*

Exemple 2.1.4. Soit a, b tels que $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et $L_2(a, b)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables

$$u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \int_a^b |u|^2 dx < \infty.$$

Alors $\dim(L_2(a, b)) = \infty$ et $L_2(a, b)$ est un espace de Hilbert réel par rapport au produit scalaire

$$(u | v) := \int_a^b uv dx.$$

Puisque l'intégration (et donc la mesure) est prise au sens de Lebesgue, alors deux fonctions u et v sont considérées comme le même élément ssi

$$u(x) = v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in]a, b[.$$

Nous parlerons donc de classes de fonctions.

Définition 2.5. *Un espace vectoriel normé V est dit séparable s'il admet une base finie ou une base de Schauder, soit une base infinie dénombrable.*

Le thoérème suivant est utile pour les diverse manipulations impliquant la multiplication de deux éléments de la base $B = \{\varphi_m(z)\}$, assurant que cette multiplication résulte en un delta de Kroenecker

$$\varphi_m(z) \cdot \varphi_n(z) = \delta_{m,n} = \begin{cases} K \in \mathbb{R}^+ & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}. \quad (2.59)$$

Théorème 2.1.2. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base orthonormale.*

Dans le cas spécifique des espaces de Hilbert, la notion de séparabilité par une base coïncide avec la notion générale de séparabilité. Nous rappelons également que tout sous-ensemble ne contenant pas le neutre additif est dit orthogonal si le produit scalaire des éléments deux à deux est nul. Si le produit scalaire de chaque élément avec lui-même est égal à 1, alors l'ensemble est dit orthonormal, ce qui mène évidemment à la notion de base orthonormale, que l'on peut obtenir par l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Pour un exemple d'application de la méthode de Gram-Schmidt à un problème physique concret, voir l'exemple 2.1.6 traitant d'une formulation particulière de l'équation de Schrödinger.

Les propriétés des espaces de Hilbert sont également utilisées lorsque sont considérés des états cohérents généralisés. L'exemple 2.1.5 présente les états cohérents en tenant compte de notions liées au corps des quaternions \mathbb{H} et fait notamment appel à l'isomorphisme $\mathbb{H} \sim E \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, utilisé pour définir la transformation (3.47) du chapitre 3 afin d'obtenir une description quaternionique des surfaces. Nous considérons ici la définition des espaces de Hilbert $V_{\mathbb{H}}^R$ à droite (R) et $V_{\mathbb{H}}^L$ à gauche (L) sur le corps \mathbb{H} .

Definition 2.6. *Soit $V_{\mathbb{H}}^R$ un espace vectoriel sous la multiplication par la droite d'un quaternion. Le produit scalaire*

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V_{\mathbb{H}}^R \times V_{\mathbb{H}}^R \longrightarrow \mathbb{H} \quad (2.60)$$

est tel que pour tout $f, g, h \in V_{\mathbb{H}}^R$ et pour tout $q \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}
i) \overline{\langle f|g\rangle} &= \langle g|f\rangle \\
ii) ||f||^2 &= \langle f|f\rangle > 0 \quad \text{sauf si } f = 0 \\
iii) \langle f|g+h\rangle &= \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle \\
iv) \langle f|gq\rangle &= \langle f|g\rangle q \\
v) \langle fq|g\rangle &= \bar{q}\langle f|g\rangle.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Definition 2.7. Un état cohérent généralisé $|q\rangle \in V_{\mathbb{H}}^R$ associé au quaternion $q \in \mathbb{H}$ et convergent sur un certain domaine \mathcal{D} , est tel que

$$\int_{\mathcal{D}} |q\rangle \langle q| d\zeta = I_{V_{\mathbb{H}}^R}, \quad \langle q|q\rangle = 1, \tag{2.62}$$

où $I_{V_{\mathbb{H}}^R}$ est l'identité de $V_{\mathbb{H}}^R$.

Exemple 2.1.5. Les quaternions forment un corps non-commutatif \mathbb{H} . C'est pour cette raison que l'on considère séparément dans [35] les états cohérents dans des espaces de Hilbert «à gauche» et «à droite». Nous supposons que toute suite de Cauchy est convergente et que l'espace est séparable; $V_{\mathbb{H}}^R$ est donc un espace de Hilbert à droite séparable. En notation de Dirac et en considérant les propriétés de $V_{\mathbb{H}}^R$,

$$|fq\rangle = |f\rangle q, \quad \langle fq| = \bar{q}\langle f|. \tag{2.63}$$

Puisque l'espace $V_{\mathbb{H}}^R$ est séparable, alors par le théorème 2.1.2, il admet une base orthonormale de Schauder $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$. Considérons l'état cohérent généralisé comme un vecteur de $V_{\mathbb{H}}^R$

$$|q\rangle = \mathcal{N}(|q|)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}}}_{\text{mult. par la droite}} \in V_{\mathbb{H}}^R, \tag{2.64}$$

où la suite $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ est telle que $1 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m \leq \dots$. La $j^{\text{ème}}$ composante de $|q\rangle$ s'écrit

$$|q_j\rangle = \left| \mathcal{N}(|q|)^{-1/2} f_j \frac{q^j}{\sqrt{\rho(j)}} \right\rangle. \quad (2.65)$$

Le normalisateur $\mathcal{N}(|q|)$ est choisi pour satisfaire la condition de normalisation $\langle q|q\rangle = 1$ de la définition 2.7. Le produit scalaire s'écrit

$$\langle q|q\rangle = \mathcal{N}(|q|)^{-1} \left\langle \sum_{m=0}^\infty f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}} \middle| \sum_{l=0}^\infty f_l \frac{q^l}{\sqrt{x_l!}} \right\rangle \quad (\text{car } \mathcal{N} \in \mathbb{R}^+) \quad (2.66)$$

$$= \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \left\langle f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}} \middle| f_l \frac{q^l}{\sqrt{x_l!}} \right\rangle \quad (\text{par iii) de 2.6}) \quad (2.67)$$

$$= \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{x_m! x_l!}} \langle f_m q^m | f_l q^l \rangle \quad (\text{car } \rho \in \mathbb{R}^+) \quad (2.68)$$

$$= \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \frac{\overline{q^m}}{\sqrt{x_m! x_l!}} \langle f_m | f_l \rangle q^l \quad (\text{par iv) et v) de 2.6}) \quad (2.69)$$

$$= \mathcal{N}_2(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{\overline{q^m} q^m}{x_m!} \quad \left(\text{car } \langle f_m | f_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } m = l \\ 0 & \text{si } m \neq l \end{cases} \right) \quad (2.70)$$

$$= \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{r^{2m}}{x_m!}. \quad (2.71)$$

Nous concluons que $\langle q|q\rangle = 1$ ssi $\mathcal{N}(|q|) = \sum_{m=0}^\infty \frac{r^{2m}}{x_m!}$. Nous considérons la représentation d'un quaternion $q = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{H}$ par une matrice 2×2 en utilisant l'isomorphisme

$$\mathbb{H} \sim E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} \middle| x_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3 \right\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \quad (2.72)$$

défini par l'application

$$F : \mathbb{H} \longrightarrow E, \quad q \mapsto F(q) = \sum_{\alpha=0}^3 \sigma_\alpha x_\alpha = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

où $\sigma_0 := \mathbb{I}_2$ et où $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=1}^3$ sont les matrices de Pauli. Une forme analogue à l'application (2.73) sera utilisée au chapitre 3 en (3.43) pour effectuer une description quaternionique à partir

d'une surface plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Un quaternion s'écrit sous la forme trigonométrique

$$q = Sc(q) + Vec(q) = q_0 + \vec{q} \quad (2.74)$$

$$= |q| \left(\frac{q_0}{|q|} + \frac{|\vec{q}|}{|q|} \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \right), \quad \omega(\vec{q}) := \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad (2.75)$$

$$= |q| \left(\cos(\theta) + \omega(\vec{q}) \sin(\theta) \right), \quad \theta \in [0, 2\pi[. \quad (2.76)$$

Les composantes de la partie vectorielle $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ en coordonnées sphériques sont

$$q_1 = r \sin(\phi) \cos(\psi), \quad (2.77)$$

$$q_2 = r \sin(\phi) \sin(\psi), \quad r \geq 0, \quad \phi \in [0, \pi], \quad \psi \in [0, 2\pi[\quad (2.78)$$

$$q_3 = r \cos(\phi), \quad (2.79)$$

$$\Rightarrow \omega(\vec{q}) = \frac{\vec{q}}{|q|} = (\sin(\phi) \cos(\psi), \sin(\phi) \sin(\psi), \cos(\phi))^T, \quad (2.80)$$

et ainsi

$$q = r (\cos(\theta) e_0 + \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi) e_1 + \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) e_2 + \sin(\theta) \cos(\phi) e_3) \quad (2.81)$$

où $r \in [0, \infty[$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta, \psi \in [0, 2\pi[$. En utilisant l'isomorphisme (2.73), nous obtenons les composantes de la représentation matricielle d'un quaternion $F(q) := (F_{ij}) \in E$

$$\begin{aligned} F_{11} &= |q| (\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)), \\ F_{12} &= |q| (-\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) + i \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi)), \\ F_{21} &= |q| (\sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) + i \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi)), \\ F_{22} &= |q| (\cos(\theta) - i \sin(\theta) \cos(\phi)), \end{aligned} \quad (2.82)$$

où $r \in [0, \infty[$, $\phi \in [0, \pi]$, $\theta, \psi \in [0, 2\pi[$. Cette représentation est équivalente à la forme polaire présentée dans [33], *i.e.*

$$F(q) = A(r)e^{i\theta\sigma(\hat{n})}, \quad A(r) = r\sigma_0, \quad \sigma(\hat{n}) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi)e^{i\psi} \\ \sin(\phi)e^{i\psi} & -\cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Nous effectuons un test de convergence sur la constante de normalisation \mathcal{N}

$$\mathcal{N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m}}{x_m!}, \quad a_m := \frac{r^{2m}}{x_m!}. \quad (2.84)$$

Par le test de D'Alembert et en supposant que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = r^2 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{m+1}} = \frac{r^2}{x} < 1 \quad (2.85)$$

$$\Leftrightarrow r < \sqrt{x} =: L. \quad (2.86)$$

Cette restriction permet d'établir le domaine de convergence

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta, \phi, \psi) \mid 0 \leq r < \sqrt{x} = L, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta, \psi < 2\pi\} \quad (2.87)$$

utilisé pour vérifier la relation fondamentale de la définition 2.7

$$\int_{\mathcal{D}} |q\rangle \langle q| d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) = \mathbb{I}_2, \quad (2.88)$$

où \mathbb{I}_2 est l'identité de l'espace de Hilbert à droite séparable $V_{\mathbb{H}}^R$ et où la mesure introduite est $d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) = d\tau(r)d\theta d\Omega(\phi, \psi) = \frac{1}{4\pi}d\tau(r)d\theta \sin(\phi)d\phi d\psi$. Ainsi,

$$\int_{\mathcal{D}} |q\rangle \langle q| d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) \quad (2.89)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} |q\rangle \langle q|^\dagger d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) \quad (2.90)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}} \right)^\dagger d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) \quad (2.91)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m^\dagger \frac{(q^m)^\dagger}{\sqrt{x_m!}} \right) d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) \quad (2.92)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_m \frac{q^m}{\sqrt{x_m!}} f_l^\dagger \frac{(q^l)^\dagger}{\sqrt{x_l!}} d\zeta(r, \theta, \phi, \psi). \quad (2.93)$$

Or,

$$f_m f_l^\dagger = |f_m\rangle \langle f_l| = \begin{cases} \mathbb{I}_2 & \text{si } m=l \\ \mathbf{0} & \text{si } m \neq l \end{cases} \quad (2.94)$$

car la base $\{f_m\}$ est orthonormale par hypothèse, donc

$$\int_{\mathcal{D}} |q\rangle \langle q| d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) \quad (2.95)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}(|q|)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m}}{x_m!} \mathbb{I}_2 d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) \quad (2.96)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^L \mathcal{N}(r)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m}}{x_m!} \sin(\phi) d\phi d\theta d\psi d\tau(r) \mathbb{I}_2 \quad (2.97)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x_m!} \int_0^L \frac{r^{2m}}{\mathcal{N}(r)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\psi d\tau(r) \mathbb{I}_2 \quad (2.98)$$

$$= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x_m!} \int_0^L \frac{r^{2m}}{\mathcal{N}(r)} d\tau(r) \mathbb{I}_2. \quad (2.99)$$

En considérant la mesure $d\tau(r) = \frac{\mathcal{N}(r)}{2\pi} \tau(r) dr$, où $\tau(r)$ est une densité auxiliaire, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{D}} |q\rangle \langle q| d\zeta(r, \theta, \phi, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x_m!} \int_0^L r^{2m} \tau(r) dr \mathbb{I}_2. \quad (2.100)$$

Nous devons donc résoudre

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{x_m!} \int_0^L r^{2m} \tau(r) dr = 1 \quad (2.101)$$

qui est sujet à

$$\int_0^L r^{2m} \tau(r) dr = x_m! \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.102)$$

Pour une suite réelle positive monotone croissante $\{x_m\}$ fixée, s'il existe une densité auxiliaire $\tau(r)$ telle que (2.102) est vérifiée, alors nous sommes en présence d'un état cohérent généralisé. Les résultats présentés dans [35] pour un espace de Hilbert quaternionique à gauche sont analogues. On y présente un exemple menant à la détermination de la densité auxiliaire, en fixant $x_m = m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et en utilisant le lien entre la factorielle et la fonction Gamma d'Euler complexe, représentée sous la forme d'une intégrale complexe. Avec ces hypothèses, les états cohérents prennent la forme

$$|q\rangle_L (\{x_m\}_{m=0}^{\infty}) = e^{-\frac{|q|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{\sqrt{m!}} \phi_m \in V_{\mathbb{H}}^L, \quad (2.103)$$

$$|q\rangle_R (\{x_m\}_{m=0}^{\infty}) = e^{-\frac{|q|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \frac{q^m}{\sqrt{m!}} \in V_{\mathbb{H}}^R. \quad (2.104)$$

2.1.3 Polynômes orthogonaux et applications liées

Les polynômes orthogonaux (**PO**) apparaissent et trouvent des applications dans de nombreux problèmes en physique. Certains d'entre eux sont étudiés depuis des centaines d'années et sont aujourd'hui qualifiés de fonctions de la physique mathématique. Le développement de méthodes numériques augmente l'intérêt quant à l'utilisation de cette classe de fonctions spéciales. En effet, les **PO** trouvent des applications, par exemple, dans les méthodes numériques liées à la méthode des moindres carrés et à l'approximation d'intégrales [44].

Les **PO** ont plusieurs propriétés communes, telles que la forme du problème différentiel les décrivant, la définition du problème de Sturm-Liouville, la formule de Rodrigues, etc. Ces caractéristiques sont définies par les coefficients du problème de Sturm-Liouville $P(z)$ et $Q(z)$, ainsi que par le poids $\rho(z)$ et le paramètre du problème λ définissant le spectre du pro-

blème (valeurs propres). Fait intéressant, le poids réel $\rho(z) > 0$ fait partie de la formulation du problème de départ et sert à la vérification de l'orthogonalité. Il définit également, avec l'intervalle et le produit scalaire considérés, un système orthogonal complet (voir la définition 2.3 et l'exemple 2.1.1) formé de l'ensemble des fonctions propres du problème $\{\varphi_n\}$, dans l'espace de Hilbert noté $\mathcal{H}_{(a,b)}(\rho(x)dx)$. Voici quelques propriétés des polynômes orthogonaux étudiées au chapitre 5.

1. Problème différentiel : les **PO** sont solutions d'une EDO linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients variés, comportant *a priori* au moins un paramètre.
2. Problème de Sturm-Liouville : les **PO** sont intimement liés au problème de Sturm-Liouville, puisque pour un spectre discret, la paire d'ensembles des **PO** d'un type particulier et de nombre réels dénombrables $(\{p_n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}, \{\lambda_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\})$ est la solution du problème de valeurs propres et de fonctions propres (2.2), sujet à des conditions frontières.
3. Représentation : les **PO** possèdent diverses représentations dont l'existence est tributaire des caractéristiques des paramètres et de la variable indépendante. Par exemple, la représentation en une série infinie de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z)$ peut être considérée sur un certain domaine du plan complexe entraînant des conditions sur les paramètres et la variable complexe z . En effet, à l'intérieur du disque unitaire $|z| < 1$, le paramètre v_3 ne peut être un entier négatif $v_3 \notin \mathbb{Z}^-$, alors que sur le cercle de $|z| = 1$, les contraintes $\operatorname{Re}(v_3 - v_1 - v_2) > 0$, $c \notin \mathbb{Z}^-$ doivent être satisfaites pour que la convergence soit assurée et que les manipulations aient un sens. Nous écrivons donc

$${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(v_1)_m (v_2)_m}{(v_3)_m m!} z^m \quad |z| \leq 1 \text{ et } \operatorname{Re}(v_3 - v_1 - v_2) > 0 \text{ et } c \notin \mathbb{Z}^-.$$

Selon certaines hypothèses, les **PO** possèdent des représentation par une intégrale curviligne ou par une intégrale de contour. Une représentation bien connue en terme du poids $\rho(x) > 0$ et permettant de vérifier l'orthogonalité est la formule de Rodrigues, de la forme

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n \rho(x)} \frac{d^n f_n}{dx^n} (\rho(x) g^n(x)),$$

où les coefficients a_n , le poids $\rho(x)$ et la fonction $g(x)$ dépendent du **PO** $f_n(x)$ et sont présentés dans [1] sous forme de tables.

4. Orthogonalité : les **PO** sont, comme leur nom l'indique, orthogonaux deux à deux, *i.e.* que le produit scalaire défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{(a,b)}(\rho(x)dx)$ dans lequel sont définis les **PO** d'un même type, est tel que $m, n \in \mathbb{N}$ et $m \neq n$ implique que $\langle p_m(x) | \rho(x) | p_n(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow p_m \perp p_n$.
5. Série génératrice : chaque type de **PO** possède une série génératrice associée permettant de déduire de nombreuses propriétés algébriques. Cette série génératrice est intrinsèquement liée aux propriétés de récurrence des **PO**. Ces propriétés sont énoncés sous forme de tables dans [1], où l'on présente d'abord la relation sous la forme générale

$$a_{1,n}f_{n+1}(x) = (a_{2,n} + a_{3,n}x)f_n(x) - a_{4,n}f_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

accompagnée d'une table de la forme

f_n	$a_{1,n}$	$a_{2,n}$	$a_{3,n}$	$a_{4,n}$
$p^1(x)$	$a_{1,n}^1$	$a_{2,n}^2$	$a_{3,n}^1$	$a_{4,n}^1$
$p^2(x)$	$a_{1,n}^2$	$a_{2,n}^2$	$a_{3,n}^2$	$a_{4,n}^2$
$p^3(x)$	$a_{1,n}^3$	$a_{2,n}^3$	$a_{3,n}^3$	$a_{4,n}^3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tableau 2.1 Relation de récurrence pour les polynômes orthogonaux

où l'exposant fait référence à un type de **PO** particulier. Des nombreux types de relations de récurrence existent, notamment des relations différentielles.

6. Il existe des liens (algébriques et différentiels) entre les différents types de **PO**. Par exemple, les polynômes d'hermite $H_n(x)$ sont liés à la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer $U(v_1, v_2; x)$ par la relation

$$H_n(x) = 2^n U\left(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right).$$

Remarque. La sous-section 2.1.2 présente la notion d'orthogonalité sous une forme abstraite formulée par la théorie des espaces de Hilbert.

Nous présentons dans l'exemple qui suit une application des polynômes d'Hermite tirée de [35] et traitant de résultats sur l'oscillateur harmonique.

Exemple 2.1.6. Le polynôme d'Hermite probabiliste d'ordre n s'écrit en termes de la formule de Rodrigues [1] pour les polynômes orthogonaux

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (2.105)$$

Cette variante du polynôme d'Hermite classique est liée au polynôme classique également décrit en termes de la formule de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (2.106)$$

par les relations

$$He_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad H_n(x) = 2^{n/2} He_n(\sqrt{2}x). \quad (2.107)$$

Considérons la formulation par la notation de Dirac de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (2.108)$$

où \hat{H} est l'opérateur différentiel hamiltonien défini par

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k \hat{x}^2. \quad (2.109)$$

Le premier terme est lié à l'énergie cinétique de la particule alors que le deuxième est lié à son énergie potentielle. Dans ce contexte, \hat{p} est l'opérateur différentiel du moment linéaire défini par

$$\hat{p} = -i\hbar \partial_x, \quad (2.110)$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h \approx 6,62607004 \cdot 10^{-34} \frac{m^2 \cdot kg}{s}$ (constante de Planck), \hat{x} est l'opérateur de position, k est la constante liée à la force et m est la masse de la particule. Ainsi, (2.108) est un problème de valeurs propres et de fonctions propres, où les valeurs propres E_n indiquent les niveaux d'énergie indépendants du temps, auxquelles sont associés des états propres $|\psi_n\rangle$. $|\psi\rangle$ est nommée

fonction d'onde du problème. Les valeurs propres du problème (2.108)

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \omega = 2\pi f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.111)$$

composent le spectre discret (mode) réel du problème et sont associées aux états propres

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad (2.112)$$

où H_n est le polynôme d'Hermite défini par (2.105). Des coordonnées «naturelles» sont associés à l'oscillateur harmonique. En exprimant les niveaux d'énergie en termes d'unités de $\hbar\omega$ et les distances en termes d'unités de $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ (adimensionnement), l'hamiltonien simplifié devient

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \quad (2.113)$$

et les valeurs propres et fonctions propres associées du problème simplifié

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (2.114)$$

s'écrivent

$$E_n = n + \frac{1}{2}, \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \pi^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.115)$$

L'opérateur différentiel linéaire H est un cas particulier de l'opérateur de Sturm-Liouville (2.1) avec $p(x) = -\frac{1}{2}$ et $q(x) = -\frac{1}{2}x^2$ et s'écrit donc

$$\mathcal{D} := \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \quad \leftrightarrow \quad H = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \right) - \left(-\frac{1}{2} x^2 \right). \quad (2.116)$$

En négligeant la constante $\frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{n!}}$ et en utilisant les relations (2.107), la solution (2.115) devient

$$E_n = n + \frac{1}{2}, \quad \psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{2}x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.117)$$

Remarque. L'opérateur H étant linéaire, toute combinaison linéaire de ces solutions par superposition est également une solution.

□

2.1.4 EDOs classiques décrivant des polynômes orthogonaux

Soit l'équation différentielle du second ordre décrivant le problème de *Sturm-Liouville*

$$\frac{d}{dz} \left(P(z) \frac{d}{dz} \right) + Q(z)y + \lambda \rho(z)y = 0. \quad (2.118)$$

Le tableau suivante présente une synthèse des coefficients associés aux équations différentielles étudiées dans le chapitre 5 et ayant des **PO** comme solution particulière et plus généralement, des EDOs décrivant une solution en termes de fonctions spéciales. Nous définissons ici les solutions comme étant complexes *a priori*.

Équation	$P(z)$	$Q(z)$	λ	Poids $\rho(z) > 0$
Legendre	$(1 - z^2)$	0	$1(1 + 1)$	1
Legendre ass.	$(1 - z^2)$	$-\frac{m^2}{1-z^2}$	$1(1 + 1)$	1
Bessel	z	$\frac{-n^2}{z}$	a^2	z
Chebyshev 1	$(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$	0	n^2	$(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$
Chebyshev 2	$(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$	0	$n(n + 2)$	$(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$
Laguerre	ze^{-z}	0	a	e^{-z}
Laguerre ass.	$z^{\alpha+1}e^{-z}$	0	k	$z^k e^{-z}$
Hermite	e^{-z^2}	0	$2a$	e^{-z^2}
Gegenbauer	$(1 - z)^{1/2+\alpha}(1 + z)^{-1/2-\alpha}$	0	$n(2\alpha + n)$	$(1 - z)^{-1/2+\alpha}(1 + z)^{-3/2-\alpha}$
Jacobi	$(1 - z)^{\alpha+1}(1 + z)^{\beta+1}$	0	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	$(1 - z)^\alpha(1 + z)^\beta$

Tableau 2.2 Coefficients des EDOs décrivant des polynômes orthogonaux.

Le tableau 2.2 illustre implicitement les liens entre les équations considérées. Les polynômes orthogonaux sont caractérisés par des propriétés communes, sauf exceptions, à l'ensemble des fonctions de cette classe spécifique de fonctions spéciales. Ces propriétés sont mises en évidence dans la section 2.1.3.

2.2 Développement d'une solution en série généralisée

Nous présentons dans cette section une généralisation de la méthode de Frobenius pour la résolution des équations différentielles.

2.2.1 Point ordinaire d'une EDO

Definition 2.8. On dit que x_0 est un point ordinaire de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (2.119)$$

si les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont holomorphes en ce point. Dans le cas contraire, le point x_0 est un point singulier de l'équation différentielle (2.119).

2.2.2 Série généralisée

Definition 2.9. Une série de la forme

$$x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (2.120)$$

où σ est un nombre donné et la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (2.121)$$

converge dans un certain domaine $|x| < R$, s'appelle série entière généralisée. De plus, si σ est un entier non-négatif, alors la série généralisée (2.120) se transforme en une série entière.

2.2.3 Existence de la solution

Théorème 2.2.1. *Si le point $x = 0$ est un point singulier de l'équation (2.119), alors les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation peuvent être représentés sous la forme*

$$p(x) = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{et} \quad q(x) = x^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad (2.122)$$

où les séries aux numérateurs convergent dans un certain domaine $|x| < R$ et les coefficients a_0 , b_0 et b_1 de l'équation ne sont pas simultanément nuls, alors l'équation (2.119) possède au moins une solution sous la forme de la série entière généralisée

$$y(x) = x^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0 \quad (2.123)$$

qui converge au moins dans le même domaine $|x| < R$.

2.2.4 Méthode des séries généralisées

Pour déterminer l'exposant σ et les coefficients c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, la série (2.123) doit être insérée dans l'EDO (2.119). Celle-ci doit donc être dérivée terme à terme sous l'hypothèse qu'elle converge pour le domaine considéré. Une simplification par x^{σ} doit ensuite être effectuée et les coefficients de toutes les puissance de x doivent être annulées par la méthode des coefficients indéterminés. Dans ce contexte, le nombre σ se détermine à partir de l'équation déterminante

$$\sigma(\sigma - 1) + a_0\sigma + b_0 = 0, \quad a_0 := \lim_{x \rightarrow 0} x p(x), \quad b_0 := \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x). \quad (2.124)$$

Soient σ_1, σ_2 les racines de l'équation déterminante (2.124). Trois cas sont à considérer.

Cas 1. Si la différence $(\sigma_1 - \sigma_2)$ n'est pas égale à un entier ou à zéro, alors nous pouvons construire deux solutions linéairement indépendantes de la forme (2.123) :

$$y_1(x) = x^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y_2(x) = x^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \quad c_0, A_0 \neq 0. \quad (2.125)$$

L'équation (2.119) étant linéaire, le principe de superposition des solutions peut être utilisé pour établir la solution générale, *i.e.*

$$y_g(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = k_1 x^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + k_2 x^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \quad (2.126)$$

où k_1, k_2 sont des constantes arbitraires.

Cas 2. Si la différence $(\sigma_1 - \sigma_2)$ est un entier positif, nous ne pouvons en général construire qu'une seule série (solution particulière) de la forme

$$y_1(x) = x^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0. \quad (2.127)$$

Cas 3. Si l'équation déterminante (2.124) possède une racine multiple, *i.e.* $\sigma_1 = \sigma_2$, nous ne pouvons construire qu'une seule série solution de l'équation (2.119).

Dans les cas 1 et 3, l'équation (2.119) aura comme deuxième solution linéairement indépendante

$$y_2(x) = A y_1(x) \log |x| + x^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (2.128)$$

où la constante A peut être nulle.

Exemple 2.2.1. Résoudre l'EDO homogène d'ordre 2

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} y = 0 \quad (2.129)$$

par la méthode des séries généralisées. Cette équation est de la forme

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + (b + cx^m)y = 0, \quad c > 0, \quad m \neq 0, \quad (2.130)$$

où $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{4}$ et $m = 1$. Ramenons l'équation à une forme correspondant à une équation de Bessel en introduisant une nouvelle variable t et une nouvelle fonction $u = u(t)$, telles que

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{et} \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.131)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(a-1), \quad \beta = \frac{m}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m}, \quad p^2 = m^{-2}((a-1)^2 - 4b). \quad (2.132)$$

Nous obtenons une équation de Bessel en t avec un paramètre $p = \frac{1}{2}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{t} \frac{du}{dt}}_{p(t)} + \underbrace{\frac{t^2 - \frac{1}{4}}{t^2}}_{q(t)} u = 0. \quad (2.133)$$

Cette équation possède un point singulier en $x_0 = t_0 = 0$. Ce point est un pôle d'ordre 1 de $p(t)$ et un pôle d'ordre 2 de $q(t)$. L'équation déterminante (2.124) entraîne $\rho_1 = \frac{1}{2}$, $\rho_2 = -\frac{1}{2}$ et ainsi $\rho_1 - \rho_2 = 1 \in \mathbb{Z}^+$. Malgré le fait que la différence $(\rho_1 - \rho_2)$ est un entier positif, l'équation (2.133) possède deux solutions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ linéairement indépendantes de la forme

$$u_1(t) = t^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad u_2(t) = t^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \quad (2.134)$$

où $c_0 \neq 0 \neq A_0$. Le calcul des solutions fait appel au principe d'égalité des coefficients de termes de même puissance, permettant la détermination des coefficients c_k et A_k par récurrence.

Puisque $y = t^{\frac{1}{2}}u$ et $x = t^2$, nous trouvons

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\frac{k}{2} + \frac{1}{8}}}{2^{2k + \frac{1}{2}} k! \cdot \Gamma(k + 1 + \frac{1}{2})}, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-\frac{k}{2} + \frac{1}{8}}}{2^{2k - \frac{1}{2}} \cdot k! \cdot \Gamma(k + 1 - \frac{1}{2})}. \quad (2.135)$$

La solution générale de (2.129) s'obtient par superposition des solutions particulières (2.135).

□

2.3 Développement asymptotique des solutions d'une EDO

Nous présentons dans cette section, sous la forme d'un exemple, une méthode permettant d'approximer la solution d'une EDO par la considération du développement asymptotique de la solution de l'équation aux valeurs limites associée à cette même EDO.

2.3.1 Opérations admises

Considérons les développements non nécessairement convergents

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{-m}. \quad (2.136)$$

Si des fonctions f, g admettent un tel développement (formule approchée), nous écrivons

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m}, \quad g(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{-m}, \quad (2.137)$$

pour des valeurs suffisamment grandes de x . L'opération d'addition est alors permise

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \pm b_m) x^{-m} \quad (2.138)$$

et si $a_0 = a_1 = 0$, alors nous pouvons formellement intégrer par parties et nous écrivons

$$\int_x^{\infty} f(x) dx \sim \sum_{m=2}^{\infty} a_m \int_x^{\infty} x^{-m} dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_x^{\infty} f(x) dx \sim \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m}{(m-1)x^{m-1}}. \quad (2.139)$$

Supposons que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Alors le développement asymptotique de h peut être obtenu par la multiplication formelle des développements de f et de g

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \sim \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{-m} \right). \quad (2.140)$$

En général, la dérivation formelle d'un développement asymptotique est inadmissible. Cependant, cela ne signifie pas que nous ne pouvons trouver un développement. En effet, considérons

la fonction

$$u(x) = e^{-x} \sin(e^x) \quad 0 < x < +\infty. \quad (2.141)$$

Son développement asymptotique est une série de coefficients $a_m = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$, alors que la dérivée

$$\frac{du}{dx} = -e^{-x} \sin(e^x) + \cos(e^x) \quad (2.142)$$

ne possède pas de limite lorsque $x \rightarrow +\infty$, puisque $-e^{-x} \sin(e^x) \rightarrow 0$ et que le cosinus est une fonction périodique. Pourtant, si une fonction f admet le développement (2.136), et si sa dérivée admet un développement asymptotique, alors

$$\frac{du}{dx} \sim - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{x^{m+1}}. \quad (2.143)$$

2.3.2 Développement asymptotique des solutions de l'équation de Bessel

Exemple 2.3.1. La fonction de Bessel de première espèce d'ordre p $\mathcal{J}_p(x)$ est une solution particulière de l'équation de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} + x \frac{d\omega}{dx} + (x^2 - p^2) \omega = 0, \quad x \neq 0. \quad (2.144)$$

Nous ramenons l'équation (2.144) à la forme standard (2.46) par les transformations (2.47)

$$a(x) = \frac{1}{x}, \quad b(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2} \Rightarrow A(x) = \log|x| + \log|c| \quad (2.145)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{1/2 A(x)} \omega = c x^{1/2} \omega \quad (2.146)$$

$$Q(x) = -\frac{1}{2} \frac{da}{dx} - \frac{1}{4} a^2 + b = 1 - \frac{p^2 - 1/4}{x^2}. \quad (2.147)$$

L'équation de Bessel sous la forme standard est donc

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(1 - \frac{p^2 - 1/4}{x^2}\right) y = 0. \quad (2.148)$$

où (2.146) signifie que (2.148) a pour solution particulière $x^{1/2} \mathcal{J}_p(x)$. Pour des valeurs de x suffisamment grandes ($x \gg p$), nous obtenons l'équation aux valeurs limites

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2} + \tilde{y} = 0, \quad (2.149)$$

soit une équation homogène à coefficients constants ayant pour solution

$$\tilde{y} = a_0 \sin(x) + b_0 \cos(x), \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.150)$$

Pour des valeurs de x suffisamment grandes,

$$a_0 \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m}, \quad b_0 \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{-m}, \quad (2.151)$$

et ainsi, le développement asymptotique de la solution de l'équation aux valeurs limites (2.149) est

$$\tilde{y} \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \sin(x) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{-m} \cos(x), \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.152)$$

La substitution de (2.152) dans l'équation de Bessel sous la forme standard (2.46) donne

$$\begin{aligned} \sin(x) \sum_{m=0}^{\infty} (m(m+1) - (p^2 - 1/4)a_m + 2mx b_m) x^{-m-2} \\ + \cos(x) \sum_{m=0}^{\infty} (-2mx a_m + m(m+1) - (p^2 - 1/4)b_m) x^{-m-2} = 0, \end{aligned} \quad (2.153)$$

où $x^{-m-2} \neq 0$ entraîne que les coefficients de x^{-m-2} doivent être nuls. Les coefficients sont donc déterminés de manière récurrente par l'analyse des différentes puissances, d'une façon analogue à la méthode de Frobenius ou résolution par les séries. Nous trouvons que a_0 et b_0

sont arbitraires et pour $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \left(p^2 - \frac{(2k+1)^2}{4} \right)}{2^m m!} \delta_{a_0, b_0}^1(m), \quad \delta_{a_0, b_0}^1(m) := \begin{cases} a_0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ b_0 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}, \\ b_m &= \frac{(-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \left(p^2 - \frac{(2k+1)^2}{4} \right)}{2^m m!} \delta_{a_0, b_0}^2(m), \quad \delta_{a_0, b_0}^2(m) := \begin{cases} b_0 & \text{si } m \text{ est pair} \\ a_0 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

La solution (2.152) est donc de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\sim \left(a_0 - \frac{p^2 - 1/4}{1!(2x)} b_0 - \frac{(p^2 - 1/4)(p^2 - 9/4)}{2!(2x)^2} a_0 + \frac{(p^2 - 1/4)(p^2 - 9/4)(p^2 - 25/4)}{3!(2x)^3} b_0 + \dots \right) \sin(x) \\ &+ \left(b_0 + \frac{p^2 - 1/4}{1!(2x)} a_0 - \frac{(p^2 - 1/4)(p^2 - 9/4)}{2!(2x)^2} b_0 - \frac{(p^2 - 1/4)(p^2 - 9/4)(p^2 - 25/4)}{3!(2x)^3} a_0 + \dots \right) \cos(x), \end{aligned} \quad (2.155)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \tilde{y} &\sim \left(a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \left(p^2 - \frac{(2k+1)^2}{4} \right)}{2^m m!} \delta_{a_0, b_0}^1(m) x^{-m} \right) \sin(x) \\ &+ \left(b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \left(p^2 - \frac{(2k+1)^2}{4} \right)}{2^m m!} \delta_{a_0, b_0}^2(m) x^{-m} \right) \cos(x). \end{aligned} \quad (2.156)$$

Pour les valeurs spécifiques $p = \pm \frac{2m+1}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ permettant de tronquer le développement ($m+1$ termes) et pour de grandes valeurs de x , l'équation (2.156) donne une bonne approximation du comportement de la solution de l'équation aux valeurs limites (2.149). Nous soulignons le fait que la forme (2.156) a été obtenue en considérant le développement asymptotique des constantes de la solution de l'équation aux valeurs limites (2.149), pour laquelle les coefficients ont pu être déterminés par substitution dans l'équation standard (2.148).

CHAPITRE 3

THÉORIE DES SURFACES

Nous présentons dans ce chapitre les équations de Gauss-Weingarten et les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi associées aux surfaces de courbure moyenne constantes plongées dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Une description quaternionique des surfaces est ensuite effectuée, menant à la considération de surfaces plongées dans des algèbres de Lie spécifiques et à la formulation du **PL** par des matrices de dimensions 2×2 . L'immersion de surfaces dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$ est ensuite considérée. Nous concluons ce chapitre par la présentation de l'approche par les surfaces solitoniques pour l'obtention de familles de surfaces solitoniques par la résolution du problème linéaire spectral associé. La représentation d'Enneper-Weierstrass et une formule de type Sym-Tafel sont présentées. À partir de cette section, nous utilisons la notation

$$\partial := \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1)$$

Dans le cas d'une fonction d'une variable complexe, nous écrivons

$$\partial\phi(z) := \frac{d\phi}{dz}. \quad (3.2)$$

3.1 Surfaces minimales et représentation d'Enneper-Weierstrass

Considérons une variation de la surface

$$F : M \subset \mathbb{E} \rightarrow N \subset \mathbb{E}^3 \quad (3.3)$$

le long d'un champ vectoriel $\vec{v} \in T_x N$ s'annulant sur la frontière de F , où $T_x N$ est un espace tangent en un point fixé x . La variation correspondante de l'aire, jusqu'aux termes d'ordre supérieur du paramètre infinitésimal ε , est donnée par le calcul variationnel de déformation

infinitésimale

$$\mathcal{A}(\vec{F} + \varepsilon \vec{v}) - \mathcal{A}(\vec{F}) = -2\varepsilon \int_F H \vec{v} \cdot \vec{N} d\mathcal{A} + O(\varepsilon^2), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (3.4)$$

où F est une surface dans \mathbb{E}^3 , \vec{v} est un champ vectoriel de déformation, \vec{N} est un vecteur normal à la surface tel que $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, et H est la courbure moyenne sur la surface. Les surfaces à courbure moyenne nulle ($H = 0$) sont nommées surfaces minimales.

3.1.1 Équations de Gauss-Weingarten, équations de Gauss-Mainardi-Codazzi et surface paramétrisée conformément dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3

Soit F une surface lisse orientable dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3

$$F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \quad (3.5)$$

où $\mathcal{R} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la surface de Riemann. La paramétrisation conforme requiert que les vecteurs ∂F et $\bar{\partial} F$ soient nilpotents

$$\langle \partial F | \partial F \rangle = \langle \bar{\partial} F | \bar{\partial} F \rangle = 0. \quad (3.6)$$

De plus, les vecteurs tangents ∂F , $\bar{\partial} F$ et la normale unitaire N forment un *repère mobile*

$$\sigma := (\partial F, \bar{\partial} F, N)_{3 \times 3}^T \in M^{3 \times 3}(\mathbb{C}) \quad (3.7)$$

et sont tels que

$$\langle \partial F | N \rangle = \langle \bar{\partial} F | N \rangle = 0 \quad (\text{orthogonalité}) \quad (3.8)$$

et

$$\langle N | N \rangle = 1. \quad (\text{unitaire}) \quad (3.9)$$

Les fonctions u , H (courbure moyenne) et Q (coefficient du différentiel de Hopf Qdz^2) sont définies par

$$\langle \partial F | \bar{\partial} F \rangle =: \frac{1}{2}e^u, \quad \langle \bar{\partial} \partial F | N \rangle =: \frac{1}{2}He^u, \quad \langle \partial^2 F | N \rangle =: Q. \quad (3.10)$$

La fonction u caractérise la surface et est telle que

$$u(z, \bar{z}) : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.11)$$

car $\langle \partial F | \bar{\partial} F \rangle \in \mathbb{R}$ implique que $e^u \in \mathbb{R}^+$ et ainsi $u \in \mathbb{R}$. Les équations de Gauss-Weingarten sont

$$\partial \sigma = \mathcal{U} \sigma, \quad \bar{\partial} \sigma = \mathcal{V} \sigma, \quad (3.12)$$

où

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \partial u & 0 & Q \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}He^u \\ -H & -2e^{-u} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}He^u \\ 0 & \bar{\partial} u & \bar{Q} \\ -2e^{-u}\bar{Q} & -H & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}, \mathcal{V} \notin \mathfrak{su}(3, \mathbb{C}), \quad (3.13)$$

où l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(N, \mathbb{C})$ et le groupe associé sont définis par la représentation matricielle fidèle

$$\mathfrak{su}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{N \times N}(\mathbb{C}) \mid A^\dagger = -A \text{ et } \text{Tr}(A) = 0\}, \quad (3.14)$$

$$SU(N, \mathbb{C}) = \{A \in M^{N \times N}(\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = AA^\dagger = I \text{ et } \det(A) = 1\}. \quad (3.15)$$

Les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi sont

$$\bar{\partial} \partial u + \frac{1}{2}H^2 e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0, \quad (\text{équation de Gauss}) \quad (3.16)$$

$$\bar{\partial} Q = \frac{1}{2} \partial H e^u, \quad \partial \bar{Q} = \frac{1}{2} \bar{\partial} H e^u. \quad (\text{équations de Codazzi}) \quad (3.17)$$

La condition assurant qu'une surface est minimale est la courbure moyenne nulle ($H = 0$)

$$\bar{\partial}\partial u = 2|Q|^2 e^{-u}, \quad \bar{\partial}Q = \partial\bar{Q} = 0, \quad (3.18)$$

i.e. $Q = Q(z)$ est une fonction holomorphe. Nous remarquons que les équations (3.6) à (3.17) décrivent des contraintes imposées sur $F, \mathcal{U}, \mathcal{V}, N, H, u$ et Q découlant de contraintes géométriques telles que la contrainte d'orthogonalité, la paramétrisation conforme et la contrainte de compatibilité sur les matrices de potentiel du système (3.12).

3.1.2 Représentation d'Enneper-Weierstrass

Il existe différentes approches directes pour l'immersion des surfaces. On présente dans [19; 20] la formule originale de Weierstrass pour l'immersion de surfaces minimales dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , aussi nommée représentation d'Enneper-Weierstrass, *i.e.* des surfaces de courbure moyenne nulle $H = 0$. Cette représentation bien connue a été fortement étudiée et est construite à partir de deux fonctions holomorphes arbitraires $\varphi(z)$ et $\varsigma(z)$ des coordonnées complexes (z, \bar{z})

$$\vec{F} = \operatorname{Re} \left(\int_{\Gamma} (i(\varphi^2 + \varsigma^2), \varphi^2 - \varsigma^2, -2\varphi\varsigma)^T dz' \right) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.19)$$

où $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe arbitraire. La formule (3.19) a été généralisée dans [17] par une formule permettant de représenter toute surface de courbure moyenne prescrite dans \mathbb{R}^3 . Cette représentation est construite à partir de deux fonctions $f(z, \bar{z})$ et $g(z, \bar{z})$

$$\vec{F} = \operatorname{Re} \left(\int^z (1 - f^2, i(1 + f^2), 2f)^T \cdot g dz' \right) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.20)$$

où $f(z, \bar{z})$ et $g(z, \bar{z})$ sont liées par la condition de compatibilité

$$\bar{\partial} \log g = -\frac{2\bar{f}\bar{\partial}f}{1+|f|^2}. \quad (3.21)$$

Nous considérons dans la présente étude une variante de la formule (3.20) décrivant une surface minimale [12], composée de deux fonctions méromorphes arbitraires η et χ , soient des fonctions holomorphes sauf en un nombre fini de leurs pôles respectifs. La représentation d'Enneper-Weierstrass prend alors la forme

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (1 - \chi^2, i(1 + \chi^2), 2\chi) \eta^2 d\xi \right) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.22)$$

où $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$. Dans le contexte d'une paramétrisation conforme et sous la contrainte de minimalité, la fonction vectorielle

$$\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad \phi := \partial F \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\phi} := \bar{\partial} F \quad (3.23)$$

ainsi que la normale unitaire N peuvent être exprimées en termes de deux fonctions méromorphes η et χ telles que

$$\phi = \frac{\eta^2}{2} \begin{pmatrix} 1 - \chi^2 \\ i(1 + \chi^2) \\ 2\chi \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \chi + \bar{\chi} \\ i(\bar{\chi} - \chi) \\ \chi\bar{\chi} - 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 + \chi\bar{\chi}}, \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (3.24)$$

Sous cette forme, nous vérifions que $\langle \phi | \phi \rangle = 0$ et $\langle N | N \rangle = 1$. De plus, nous aurons que

$$e^u = |\eta^2|^2 (1 + |\chi|^2)^2 \quad \text{et} \quad Q = -\eta^2 \partial \chi. \quad (3.25)$$

En effet, de (3.10), nous avons que

$$e^u := 2 \langle \partial F | \bar{\partial} F \rangle = 2 \phi \bar{\phi} = 2 \frac{\eta^2}{2} \begin{pmatrix} 1 - \chi^2 \\ i(1 + \chi^2) \\ 2\chi \end{pmatrix} \frac{\bar{\eta}^2}{2} \begin{pmatrix} 1 - \bar{\chi}^2 \\ i\bar{i}(1 + \bar{\chi}^2) \\ 2\bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\eta \bar{\eta})^2}{2} ((1 - \chi^2)(1 - \bar{\chi}^2) + i\bar{i}(1 + \chi^2)(1 + \bar{\chi}^2) + 4\chi\bar{\chi}) \\
&= \frac{(\eta \bar{\eta})^2}{2} (2 + 2\chi^2\bar{\chi}^2 + 4\chi\bar{\chi}) \\
&= |\eta|^2(1 + |\chi|^2)^2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

et en posant $\mu(z) := \eta^2(z)$, nous tirons de (3.10) que

$$Q := \langle \partial \partial F | N \rangle = \langle \partial \phi | N \rangle \tag{3.28}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2}(1 - \chi^2) - \mu\chi\partial\chi \\ \frac{i\partial\mu}{2}(1 + \chi^2) + i\mu\chi\partial\chi \\ \partial\mu\chi + \mu\partial\chi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \chi + \bar{\chi} \\ i(\bar{\chi} - \chi) \\ \chi\bar{\chi} - 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 + \chi\bar{\chi}} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 + \chi\bar{\chi}} \left(\frac{\partial\mu}{2}(1 - \chi^2)(\chi + \bar{\chi}) - \mu\chi\partial\chi(\chi + \bar{\chi}) \right) \\
&\quad - \frac{1}{1 + \chi\bar{\chi}} \left(\frac{\partial\mu}{2}(1 + \chi^2)(\bar{\chi} - \chi) + \mu\chi\partial\chi(\bar{\chi} - \chi) \right) \\
&\quad + \frac{1}{1 + \chi\bar{\chi}} (\partial\mu\chi(\chi\bar{\chi} - 1) + \mu\partial\chi(\chi\bar{\chi} - 1))
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$= \frac{-\mu\chi\partial\chi\bar{\chi} - \mu\partial\chi}{1 + \chi\bar{\chi}} \tag{3.31}$$

$$= -\eta^2\partial\chi. \tag{3.32}$$

La fonction d'immersion F , nommée représentation d'Enneper-Weierstrass, est donnée par (3.22) et lorsque $Q \equiv 1$, les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi se réduisent à l'équation de *Liouville*

$$\bar{\partial}\partial u = 2e^{-u} \quad (3.33)$$

dont la solution est donnée en terme de la fonction holomorphe χ

$$e^{-u} = \frac{|\partial\chi|^2}{(1+|\chi|^2)^2} \quad (3.34)$$

$$\Leftrightarrow u = -2\log\left(\frac{|\partial\chi|}{(1+|\chi|^2)}\right). \quad (3.35)$$

De plus, $Q = 1$ implique que

$$\eta^2 = -\frac{1}{\partial\chi} \quad (3.36)$$

et la formule d'immersion (3.22) devient

$$F = -\frac{1}{2}\Re\left(\int_{\xi_0}^{\xi} (1-\chi^2, i(1+\chi^2), 2\chi))^T \frac{1}{\partial\chi} dz\right) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.37)$$

Considérons la relation (3.34) et remarquons que le dénominateur $p(z) := (1+|\chi|^2)^2 \neq 0$, car sinon $|\chi| < 0$. Il n'y a donc aucun point singulier à considérer. Aussi, $e^{-u} \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial\chi \neq 0$. Ainsi, le dénominateur du côté droit de l'équation (3.35) ne peut être nul ; la fonction u est donc définie partout sur \mathbb{C} (aucun point singulier) sauf aux points qui sont des zéros de $\partial\chi$.

3.2 Description quaternionique des surfaces

Dans l'algèbre des quaternions \mathbb{H} , le groupe multiplicatif des quaternions est noté

$$\mathbb{H}_* = \mathbb{H} \setminus \{0\} \quad (3.38)$$

et est engendré par la base canonique

$$B = \{\mathbb{I}, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}, \quad \underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = \underline{i}\underline{j}\underline{k} = -1. \quad (3.39)$$

Les relations entre les matrices de Pauli $\{\sigma_k\}_{k=1}^3$ et la base B sont les suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\underline{i}, & \sigma_2 &:= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\underline{j}, \\ \sigma_3 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\underline{k}, & \sigma_0 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma, \quad \sigma_\alpha^2 = \sigma_0, \quad \sigma_\alpha^\dagger = \sigma_\alpha, \quad (3.41)$$

ε étant le symbole de Levi-Civita défini en terme du δ de *Kronecker*

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} := \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ est en position } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3.42)$$

En utilisant une application analogue à (2.73), nous identifions \mathbb{E}^3 avec l'espace des quaternions imaginaires $\mathbb{Im}\mathbb{H} \simeq \mathfrak{su}(2)$ par le changement de base

$$\tilde{F} = -i \sum_{\alpha=1}^3 F_\alpha \sigma_\alpha \in \mathbb{Im}\mathbb{H} \simeq \mathfrak{su}(2) \quad \leftrightarrow \quad \vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{E}^3, \quad (3.43)$$

$$\tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}, \quad \sigma_\alpha^\dagger = \sigma_\alpha, \quad (3.44)$$

et tirons profit de l'isomorphisme $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$, où l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et son groupe associé sont définis par la représentation matricielle fidèle

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}, \quad (3.45)$$

$$SO(3) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A^T A = A A^T = I \text{ et } \det(A) = 1\} \quad (3.46)$$

Montrons que \tilde{F} est anti-hermitienne. En substituant (3.40) dans (3.43), nous trouvons que

$$\tilde{F} = -i \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} \sigma_{\alpha} \quad (3.47)$$

$$= -i \left(F_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (3.48)$$

$$= \begin{pmatrix} -iF_3 & -iF_1 - F_2 \\ -iF_1 + F_2 & iF_3 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$\Rightarrow -\tilde{F}^{\dagger} = \begin{pmatrix} -iF_3 & -iF_1 - F_2 \\ -iF_1 + F_2 & iF_3 \end{pmatrix} = \tilde{F}. \quad (3.50)$$

Remarque. La transformation (3.43) est un cas particulier de l'isomorphisme (2.73) de l'exemple 2.1.5, où la partie scalaire du quaternion est nulle, *i.e.* $Sc(q) = Sc(F) := F_0 = 0$.

Definition 3.1. Le produit scalaire symétrique, bilinéaire et défini positif sur $\mathfrak{su}(2)$ est défini par

$$\langle X | Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{su}(2). \quad (3.51)$$

Notons \tilde{F} et \tilde{N} les matrices obtenues par les vecteurs \vec{F} et \vec{N} et considérons l'élément du groupe de Lie spécial unitaire $\Phi \in SU(2, \mathbb{C})$ qui transforme la base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ en repère mobile

$\{\partial_x \tilde{F}, \partial_y \tilde{F}, \tilde{N}\}$ par les relations

$$\partial_x \tilde{F} = e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \underline{i} \Phi, \quad \partial_y \tilde{F} = e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \underline{j} \Phi, \quad \tilde{N} = \Phi^{-1} \underline{k} \Phi. \quad (3.52)$$

Par (3.1), les dérivées de \tilde{F} en termes de z et \bar{z} s'écrivent

$$\partial \tilde{F} = \frac{1}{2} (\partial_x \tilde{F} - i \partial_y \tilde{F}), \quad \bar{\partial} \tilde{F} = \frac{1}{2} (\partial_x \tilde{F} + i \partial_y \tilde{F}) \quad (3.53)$$

$$\Leftrightarrow \partial \tilde{F} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \underline{i} \Phi - i e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \underline{j} \Phi \right), \quad \bar{\partial} \tilde{F} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \underline{i} \Phi + i e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \underline{j} \Phi \right) \quad (3.54)$$

$$\Leftrightarrow \partial \tilde{F} = \frac{-i e^{\frac{u}{2}}}{2} \left(\Phi^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi \right), \quad (3.55)$$

$$\bar{\partial} \tilde{F} = \frac{-i e^{\frac{u}{2}}}{2} \left(\Phi^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi \right), \quad (3.56)$$

$$\Leftrightarrow \partial \tilde{F} = -i e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi, \quad \bar{\partial} \tilde{F} = -i e^{\frac{u}{2}} \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi, \quad (3.57)$$

et les conditions de conformité (3.8) et (3.9) sont toujours respectées.

3.2.1 Formule explicite de la surface

Les composantes de la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22) pour l'immersion de la surface dans \mathbb{R}^3 s'écrivent

$$F_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (1 - \chi^2) \eta^2 dz' \right), \quad F_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{z_0}^z (1 + \chi^2) \eta^2 dz' \right), \quad F_3 = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \chi \eta^2 dz' \right),$$

où $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Par la transformation (3.43) et par les résultats présentés dans [7; 12], nous en effectuons une description quaternionique par l'identification de la représentation d'Enneper-

Weierstrass (3.22) avec une matrice 2×2

$$\tilde{F} = -i \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} \sigma_{\alpha} \in \mathbb{Im} \mathbb{H} \quad \leftrightarrow \quad \vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{E}^3, \quad F^{\dagger} = -F, \quad \sigma_{\alpha}^{\dagger} = \sigma_{\alpha}, \quad (3.58)$$

et trouvons que

$$\tilde{F} = -i \begin{pmatrix} F_3 & F_1 - iF_2 \\ F_1 + iF_2 & -F_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & -\tilde{F}_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Posons

$$A = \int_{z_0}^z (1 - \chi^2) \eta^2 dz', \quad B = \int_{z_0}^z (1 + \chi^2) \eta^2 dz', \quad C = \int_{z_0}^z \chi \eta^2 dz'. \quad (3.60)$$

Alors

$$F_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(A), \quad F_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i \cdot B), \quad F_3 = \operatorname{Re}(C). \quad (3.61)$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_{11} = -i(\operatorname{Re}(C)) = -i \left(\frac{c + \bar{c}}{2} \right) = -\frac{i}{2} \left(\int_{z_0}^z \chi \eta^2 dz' + \overline{\int_{z_0}^z \chi \eta^2 dz'} \right) = -\tilde{F}_{22}. \quad (3.62)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} (\operatorname{Re}(A) - i \operatorname{Re}(i \cdot B)) = -\frac{i}{2} (\operatorname{Re}(A) + i \operatorname{Im}(B)) \\ &= -\frac{i}{4} ((A + \bar{A}) + (B - \bar{B})) = -\frac{i}{4} ((A + B) + \overline{A - B}) \\ &= -\frac{i}{2} \left(\int_{z_0}^z \eta^2 dz' - \overline{\int_{z_0}^z \chi^2 \eta^2 dz'} \right), \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{21} &= -\frac{i}{2} (\operatorname{Re}(A) + i \operatorname{Re}(i \cdot B)) = -\frac{i}{2} (\operatorname{Re}(A) - i \operatorname{Im}(B)) \\ &= -\frac{i}{4} ((A + \bar{A}) - (B - \bar{B})) = -\frac{i}{4} ((A - B) + \overline{A + B}) \\ &= -\frac{i}{2} \left(-\int_{z_0}^z \chi^2 \eta^2 dz' + \overline{\int_{z_0}^z \eta^2 dz'} \right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow \tilde{F} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \chi \eta^2 d\xi + \overline{\int_{z_0}^z \chi \eta^2 d\xi} & \int_{z_0}^z \eta^2 d\xi - \overline{\int_{z_0}^z \chi^2 \eta^2 d\xi} \\ -\int_{z_0}^z \chi^2 \eta^2 d\xi + \overline{\int_{z_0}^z \eta^2 d\xi} & -\int_{z_0}^z \chi \eta^2 d\xi - \overline{\int_{z_0}^z \chi \eta^2 d\xi} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2), \quad (3.65)$$

car $Tr(\tilde{F}) = 0$ et $\tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}$. La formule (3.65) pour \tilde{F} est une représentation quaternionique paramétrique en z de la surface dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

3.2.2 Problème linéaire pour la représentation des surfaces minimales par des matrices de dimensions 2×2

Utilisant l'isomorphisme des algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$, les équations de Gauss-Weingarten pour le repère mobile peuvent être décrites en termes de matrices 2×2 , où $\Phi \in SU(2, \mathbb{C})$ satisfait les équations différentielles linéaires

$$\partial\Phi = \mathcal{U}\Phi, \quad \bar{\partial}\Phi = \mathcal{V}\Phi, \quad (3.66)$$

où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont de la forme

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\partial u & -Qe^{-\frac{u}{2}} \\ \frac{1}{2}He^{\frac{u}{2}} & -\frac{1}{4}\partial u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\bar{\partial}u & -\frac{1}{2}He^{\frac{u}{2}} \\ \bar{Q}e^{-\frac{u}{2}} & \frac{1}{4}\bar{\partial}u \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad \mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{V}. \quad (3.67)$$

et où l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ et le groupe associé sont définis par la représentation matricielle fidèle

$$\mathfrak{sl}(N, \mathbb{K}) = \{A \in M^{N \times N}(\mathbb{K}) \mid Tr(A) = 0\}, \quad (3.68)$$

$$SL(N, \mathbb{K}) = \{A \in M^{N \times N}(\mathbb{K}) \mid det(A) = 1\}. \quad (3.69)$$

Dans le cas des surfaces minimales ($H = 0$), nous obtenons

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\partial u & -Qe^{-\frac{u}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{4}\partial u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\bar{\partial}u & 0 \\ \bar{Q}e^{-\frac{u}{2}} & \frac{1}{4}\bar{\partial}u \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (3.70)$$

Si $H = 0$, les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (3.16) et (3.17) se réduisent à un système à deux inconnues

$$\bar{\partial}\partial u - 2Q\bar{Q}e^{-u} = 0, \quad \bar{\partial}Q = 0, \quad H = 0, \quad (3.71)$$

qui a comme solution générale

$$u = 2 \log(\eta \bar{\eta} (1 + \chi \bar{\chi})) \quad \text{et} \quad Q = -\eta^2 \partial \chi, \quad \bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0. \quad (3.72)$$

À la suite de la transformation de jauge $\Psi = M\Phi$, $M \in SL(2, \mathbb{C})$ (voir le chapitre 4), la fonction d'onde Ψ satisfait le système linéaire suivant

$$\partial \Psi = \lambda \eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \Psi, \quad \bar{\partial} \Psi = 0, \quad (3.73)$$

$$\Rightarrow \quad \partial \Psi = -\frac{\lambda Q}{\partial \chi} \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \Psi, \quad (3.74)$$

car $\eta^2 = -\frac{Q}{\partial \chi}$, et où η et χ sont localement holomorphes.

3.3 Immersion des surfaces dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$

Considérons l'immersion conforme de la surface de Riemann \mathcal{R} par F

$$F : \mathcal{R} \rightarrow H^3(\lambda) \subset \mathbb{R}^{3,1}, \quad \langle \partial F | \partial F \rangle = 0, \quad \langle \bar{\partial} F | \bar{\partial} F \rangle = 0, \quad (3.75)$$

(en coordonnées complexes locales $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$) ainsi que $H^3(\lambda)$, un espace hyperbolique de courbure prescrite λ avec le produit scalaire

$$\langle X | X \rangle = -\lambda^{-2} \quad \forall X \in H^3(\lambda). \quad (3.76)$$

La métrique induite est définie positive et possède une courbure sectionnelle constante. De plus, les vecteurs $F, F_z, F_{\bar{z}}$ et la normale unitaire N constituent un repère mobile

$$\sigma = (F, \partial F, \bar{\partial} F, N) \quad (3.77)$$

sur la surface par une base de Gauss-Weingarten complexifiée de $\mathbb{R}^{3,1}$. La fonction u caractérise la surface et est telle que

$$u(z, \bar{z}) : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (3.78)$$

La courbure moyenne H et le coefficient du différentiel de Hopf Q sont définis par

$$\langle \partial F | \bar{\partial} F \rangle = \frac{1}{2} e^u \quad \langle \bar{\partial} \partial F | N \rangle = \frac{1}{2} H e^u, \quad \langle \partial^2 F | N \rangle = Q, \quad (3.79)$$

et les contraintes s'appliquant au repère mobile sont définies par les équations de Gauss-Weingarten

$$\begin{cases} \partial^2 F = \partial u \partial F + Q N \\ \bar{\partial} \partial F = \frac{\lambda^2}{2} e^u F + \frac{1}{2} H e^u N \\ \partial N = -H \partial F - 2Q e^{-u} \bar{\partial} F \end{cases} \quad (3.80)$$

Dans ce contexte, les relations entre u , H et Q sont définies par les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi

$$\begin{cases} \bar{\partial} \partial u + \frac{1}{2} (H^2 - \lambda^2) e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0 \\ \bar{\partial} Q = \frac{1}{2} H_z e^u \\ \partial \bar{Q} = \frac{1}{2} \bar{\partial} H e^u \end{cases} \quad (3.81)$$

Remarque. Lorsque $H \equiv \lambda$, les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi se réduisent à l'équation de *Liouville* en u , comme nous l'avons montré précédemment en (3.33) pour $H \equiv 0$ dans le cas de l'immersion de surfaces dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

3.3.1 Spineurs et représentation des équations de Gauss-Weingarten par des matrices 2×2

Identifions les éléments X de l'espace de Lorentz par des matrices hermitiennes X^σ [5] par la transformation

$$X = (X_0, X_1, X_2, X_3) \longleftrightarrow X^\sigma = X_0 \mathbb{I}_2 + \sum_{k=1}^3 X_k \sigma_k = \begin{pmatrix} X_0 + X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_1 + iX_2 & X_0 - X_3 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

où

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Le produit scalaire est alors défini par

$$\langle X^\sigma | Y^\sigma \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left(X^\sigma \sigma_2 (Y^\sigma)^T \sigma_2 \right). \quad (3.84)$$

Nous utilisons l'homomorphisme ρ [12] défini par

$$\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, 1), \quad (\rho(A)X)^\sigma = A^\dagger X^\sigma A. \quad (3.85)$$

Le coté gauche de l'équation est une représentation de l'élément $\rho(A)X \in \mathbb{R}^{3,1}$ après transformation. La fonction $\rho(A)$ agissant sur X est élément du groupe de Lie $SO(3, 1)$ alors que la fonction A agissant sur X^σ est élément de $SL(2, \mathbb{C})$, où l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ et le groupe associé sont définis par la représentation matricielle fidèle

$$\mathfrak{so}(3, 1) = \{A \in \mathfrak{gl}_{3+1} \mid A^T I_{3,1} + I_{3,1} A = 0\}, \quad (3.86)$$

$$SO(3, 1) = \{A \in M^{4 \times 4}(\mathbb{C}) \mid A^T I_{3,1} A = \mathbb{I} \text{ et } \det(A) = 1\}, \quad (3.87)$$

où

$$I_{3,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Nous sommes à la recherche de la matrice de changement de base $\phi \in SL(2, \mathbb{C})$ permettant de passer de la base orthonormale $B = \{\mathbb{I}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ à la base orthonormale $B' = \{F, \partial_x F, \partial_y F, N\}$

$$(\lambda F^\sigma, e^{-\frac{u}{2}} \partial_x F^\sigma, e^{-\frac{u}{2}} \partial_y F^\sigma, N^\sigma) = \phi^\dagger (\mathbb{I}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \phi \quad (3.89)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda F^\sigma, e^{-\frac{u}{2}} \partial_x F^\sigma, e^{-\frac{u}{2}} \partial_y F^\sigma, N^\sigma) = (\phi^\dagger \phi, \phi^\dagger \sigma_1 \phi, \phi^\dagger \sigma_2 \phi, \phi^\dagger \sigma_3 \phi). \quad (3.90)$$

Nous abordons le **PL** 2×2 et définissons les fonctions \mathcal{U} et \mathcal{V} à valeur dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ par

$$\partial\phi = \mathcal{U}\phi, \quad \bar{\partial}\phi = \mathcal{V}^\dagger\phi. \quad (3.91)$$

Les matrices \mathcal{U} et \mathcal{V} sont de la forme [12]

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\partial u & -Qe^{-\frac{u}{2}} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{u}{2}}(\lambda + H) & -\frac{1}{4}\partial u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\partial u & Qe^{-\frac{u}{2}} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{u}{2}}(\lambda - H) & \frac{1}{4}\partial u \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad (3.92)$$

$$\text{Tr}(\mathcal{U}) = \text{Tr}(\mathcal{V}) = 0. \quad (3.93)$$

3.3.2 Formule d'immersion

Considérons une solution (u, Q, H) des équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (3.81) et une solution donnée ϕ à valeur dans $SL(2, \mathbb{C})$ du système linéaire (3.91). Nous obtenons

$$F^\sigma = \frac{1}{\lambda}\phi^\dagger\phi \in H^3(\lambda), \quad (3.94)$$

qui représente une immersion conforme dans $H^3(\lambda)$. Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, l'hyperboloïde $H^3(\lambda)$ se réduit à l'espace euclidien \mathbb{R}^3

$$\lambda \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad H^3(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (3.95)$$

Nous souhaitons considérer une surface minimale dans l'espace euclidien à partir de la formule (3.94), mais nous ne pouvons prendre directement la limite à cause du dénominateur

$$\lambda \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad F^\sigma(z_0, \bar{z}_0) \rightarrow \infty. \quad (3.96)$$

Nous effectuons donc d'abord une translation correspondant à un déplacement de l'origine du centre de l'hyperboloïde vers un point sur l'hyperboloïde [12]

$$\tilde{F}^\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\phi^\dagger \phi - \mathbb{I}_2 \right). \quad (3.97)$$

3.3.3 Surfaces à courbure moyenne constante CMC- λ

Dans le contexte où $H = \lambda$, les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (3.81) sont réduites à

$$\bar{\partial} \partial u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0, \quad \bar{\partial} Q = 0 \quad (3.98)$$

et le **PL** réduit s'écrit

$$\partial \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \partial u & -Q e^{-\frac{u}{2}} \\ \lambda e^{\frac{u}{2}} & -\frac{1}{4} \partial u \end{pmatrix} \Phi, \quad \bar{\partial} \Phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \bar{\partial} u & 0 \\ \bar{Q} e^{-\frac{u}{2}} & \frac{1}{4} \bar{\partial} u \end{pmatrix} \Phi. \quad (3.99)$$

Les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (3.98) sont identiques à celles découlant des contraintes liées à des surfaces minimales dans \mathbb{E}^3 (3.18) et (3.71). Considérant deux fonctions holomorphes arbitraires η et χ , la solution générale du système réduit (3.98) est

$$e^{\frac{u}{2}} = \eta \bar{\eta} (1 + \chi \bar{\chi}), \quad Q = -\eta^2 \partial \chi. \quad (3.100)$$

Remarque. Il est à noter que ce résultat, s'appliquant aux surfaces de courbure moyenne constante ($H = \lambda$) plongées dans un espace hyperbolique, est identique au résultat (3.72) s'appliquant aux surfaces de courbure moyenne constante nulle ($H = 0$) plongées dans un espace euclidien.

3.4 Approche par les surfaces solitoniques et problème spectral linéaire

Les surfaces solitoniques sont des familles de surfaces à un paramètre obtenues du problème spectral linéaire. La condition de compatibilité

$$\partial_y \mathcal{U}(\lambda) - \partial_x \mathcal{V}(\lambda) + [\mathcal{U}(\lambda), \mathcal{V}(\lambda)] = 0 \quad (3.101)$$

résulte du système intégrable de deux équations linéaires à deux variables indépendantes x et y

$$\partial_x \Psi = \mathcal{U}(\lambda) \Psi, \quad \partial_y \Psi = \mathcal{V}(\lambda) \Psi, \quad (3.102)$$

pour $\Psi \in SU(N, \mathbb{C})$, où λ est le paramètre spectral du problème spectral linéaire et où $SU(N, \mathbb{C}) \subset SL(2, \mathbb{C})$ tel que défini en (3.14) est le groupe de Lie spécial unitaire à $N^2 - 1$ paramètres. Dans ce contexte, le problème spectral linéaire (3.102) est qualifié de *paire de Lax* et la famille de surfaces associées à ce système est une famille de surfaces solitoniques.

Remarque. Le paramètre spectral λ provient d'une symétrie de la conditions de compatibilité équivalente aux équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (3.16) et (3.17). Cette condition est de la forme (3.101), mais sans le paramètre spectral. L'application de la transformation (opérateur différentiel) définissant cette symétrie mène à la condition (3.101) et au problème spectral linéaire (3.102). Ces notions dépassent le périmètre du présent projet de recherche.

3.4.1 Formule d'immersion pour les surfaces solitoniques

Théorème 3.4.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Si $\mathcal{U}(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$ sont éléments d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} et si $\Psi(\lambda)$ est élément du groupe de Lie G associé à \mathfrak{g} , alors la formule de Sym-Tafel (ST)*

$$F^{ST}(\lambda; x, y) = \Psi^{-1}(\lambda; x, y) \partial_\lambda \Psi(\lambda; x, y) \in \mathfrak{g} \quad (3.103)$$

représente une surface dans \mathfrak{g} , à condition que les vecteurs tangents

$$\partial_x F = \Psi^{-1}(\partial_\lambda \mathcal{U}) \Psi, \quad \partial_y F = \Psi^{-1}(\partial_\lambda \mathcal{V}) \Psi \quad (3.104)$$

soient linéairement indépendants.

La formulation (3.102) est un **PL** dans lequel a été introduit le paramètre spectral. Dans ce contexte, cette formulation du **PL** est nommée *paire de Lax*. Les matrices de potentiel \mathcal{U} et \mathcal{V} telles que formulées en (3.67) sont éléments de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, mais mènent tout de même à l'obtention d'une surface dans $\mathfrak{su}(2)$ par le théorème 3.4.1. Cela est dû au fait que les fonctions de la formule (3.103) sont exprimées en termes des coordonnées réelles x et y , où $z = x + iy$. En effet, en utilisant les relations (3.1) et la formulation du **PL** (3.66) en termes de coordonnées complexe z et complexe conjugué \bar{z} , nous obtenons

$$\begin{cases} \partial \Phi \Phi^{-1} = \mathcal{U} \\ \bar{\partial} \Phi \Phi^{-1} = \mathcal{V} \end{cases} \quad (3.105)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (\partial_x \Phi - i \partial_y \Phi) \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \partial u & -Q e^{-\frac{u}{2}} \\ \frac{1}{2} H e^{\frac{u}{2}} & -\frac{1}{4} \partial u \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} (\partial_x \Phi + i \partial_y \Phi) \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \bar{\partial} u & -\frac{1}{2} H e^{\frac{u}{2}} \\ \bar{Q} e^{-\frac{u}{2}} & \frac{1}{4} \bar{\partial} u \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x \Phi \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} \partial_y u & -Q e^{-\frac{u}{2}} - \frac{1}{2} H e^{\frac{u}{2}} \\ \bar{Q} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{1}{2} H e^{\frac{u}{2}} & \frac{i}{4} \partial_y u \end{pmatrix} \\ \partial_y \Phi \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{4} \partial_x u & -i Q e^{-\frac{u}{2}} + \frac{i}{2} H e^{\frac{u}{2}} \\ -i \bar{Q} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{i}{2} H e^{\frac{u}{2}} & -\frac{i}{4} \partial_x u \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.107)$$

où $\partial_x \Phi \Phi^{-1}, \partial_y \Phi \Phi^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$, car $Tr(\partial_x \Phi \Phi^{-1}) = Tr(\partial_y \Phi \Phi^{-1}) = 0$ et $(\partial_x \Phi \Phi^{-1})^\dagger = -\partial_x \Phi \Phi^{-1}$, $(\partial_y \Phi \Phi^{-1})^\dagger = -\partial_y \Phi \Phi^{-1}$. Ce résultat correspond à celui présenté dans [7]. Ainsi, la formulation (3.67) est consistante avec le théorème 3.4.1.

Remarque. Les formulations (3.101) et (3.102) sont équivalentes.

Démonstration. Dans ce contexte, une solution $\Psi(\lambda; x, y)$ est une fonction d'onde appartenant au groupe de Lie $G = SU(N, \mathbb{C})$ et $\mathcal{U}(x, y, \lambda)$, $\mathcal{V}(x, y, \lambda)$ sont des fonctions appartenant à

l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N, \mathbb{C})$ associée à G . L'existence de l'inverse de Ψ est assurée :

$$\Psi \in G \Rightarrow \exists \Psi^{-1} \in G, \quad \Psi \Psi^{-1} = \Psi^{-1} \Psi = e. \quad (3.108)$$

La première équation du **PL** (3.102) devient donc

$$\partial_x \Psi \Psi^{-1} = \mathcal{U} \quad (3.109)$$

$$\Leftrightarrow \partial_y \mathcal{U} = \partial_y (\partial_x \Psi \Psi^{-1}) \quad (3.110)$$

$$\Leftrightarrow \partial_y \mathcal{U} = \partial_y \partial_x \Psi \Psi^{-1} + \partial_x \Psi \partial_y \Psi^{-1} \quad (3.111)$$

$$\Leftrightarrow \partial_y \mathcal{U} = \partial_y \partial_x \Psi \Psi^{-1} + \partial_x \Psi (-\Psi^{-1} \partial_y \Psi \Psi^{-1}). \quad (3.112)$$

De la même manière, nous trouvons que $\partial_x \mathcal{V} = \partial_x \partial_y \Psi \Psi^{-1} + \partial_y \Psi (-\Psi^{-1} \partial_x \Psi \Psi^{-1})$. Ainsi,

$$\partial_y \mathcal{U} - \partial_x \mathcal{V} = -(\partial_x \Psi \Psi^{-1} \partial_y \Psi \Psi^{-1} - \partial_y \Psi \Psi^{-1} \partial_x \Psi \Psi^{-1}) \quad (3.113)$$

$$\Leftrightarrow \partial_y \mathcal{U} - \partial_x \mathcal{V} = -(\mathcal{U} \mathcal{V} - \mathcal{V} \mathcal{U}) \quad (3.114)$$

$$\Leftrightarrow \partial_y \mathcal{U} - \partial_x \mathcal{V} - [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0, \quad (3.115)$$

ce qui montre la condition de compatibilité (3.101). □

La présence du paramètre spectral λ permet de trouver les vecteurs tangents $\partial_x F$ et $\partial_y F$ en fonction des matrices de potentiel \mathcal{U} et \mathcal{V} .

Démonstration. Soient $\Psi(\lambda; x, y)$ la fonction d'onde et $\mathcal{U}(\lambda; x, y)$ la matrice de potentiel du PL (3.102). Ces applications sont telles que

$$\begin{aligned}
 \partial_x \Psi &= \mathcal{U} \Psi \\
 \Leftrightarrow \quad \mathcal{U} &= \partial_x \Psi \Psi^{-1} && (\text{car } \Psi \in G) \\
 \Rightarrow \quad \partial_\lambda \mathcal{U} &= \partial_\lambda (\partial_x \Psi \Psi^{-1}) \\
 \Leftrightarrow \quad \partial_\lambda \mathcal{U} &= \partial_\lambda \partial_x \Psi \Psi^{-1} + \partial_x \Psi \Psi_\lambda^{-1} \\
 \Leftrightarrow \quad \partial_\lambda \mathcal{U} &= \partial_\lambda \partial_x \Psi \Psi^{-1} + \partial_x \Psi (-\Psi^{-1} \partial_\lambda \Psi \Psi^{-1}) \\
 \Leftrightarrow \quad \Psi^{-1} \partial_\lambda \mathcal{U} \Psi &= \Psi^{-1} (\partial_\lambda \partial_x \Psi - \partial_x \Psi \Psi^{-1} \partial_\lambda \Psi).
 \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous tirons de (3.103) que

$$\begin{aligned}
 F &= \Psi^{-1} \partial_\lambda \Psi \\
 \Leftrightarrow \quad \partial_x F &= \partial_x (\Psi^{-1} \Psi_\lambda) \\
 \Leftrightarrow \quad \partial_x F &= \Psi_x^{-1} \Psi_\lambda + \Psi^{-1} \Psi_{\lambda x} \\
 \Leftrightarrow \quad \partial_x F &= (-\Psi^{-1} \Psi_x \Psi^{-1}) \Psi_\lambda + \Psi^{-1} \Psi_{\lambda x} \\
 \Leftrightarrow \quad \partial_x F &= \Psi^{-1} (\partial_x \partial_\lambda \Psi - \partial_x \Psi \Psi^{-1} \partial_\lambda \Psi).
 \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\partial_x F = \Psi^{-1} (\partial_\lambda \mathcal{U}) \Psi, \quad \partial_y F = \Psi^{-1} (\partial_\lambda \mathcal{V}) \Psi. \quad (3.116)$$

□

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé, F peut être interprétée comme une surface dans \mathfrak{g} à condition que les vecteurs tangents $\partial_x F$ et $\partial_y F$ soient linéairement indépendants (cohérence géométrique), *i.e.* $\forall a, b \in \mathbb{K}$,

$$a \partial_x F + b \partial_y F = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a = b = 0. \quad (3.117)$$

Cette condition sera remplie si $\partial_\lambda \mathcal{U}$ et $\partial_\lambda \mathcal{V}$ sont linéairement indépendants car

$$a\partial_x F + b\partial_y F = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow a\Psi^{-1}(\partial_\lambda \mathcal{U})\Psi + b\Psi^{-1}(\partial_\lambda \mathcal{V})\Psi = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow a\partial_\lambda \mathcal{U} + b\partial_\lambda \mathcal{V} = \mathbf{0}.$$

La formule (3.103) a d'abord été proposée dans [30], puis utilisée dans [31]. Elle permet d'établir un lien entre la géométrie classique et les systèmes intégrables, menant à l'exigence que toutes les surfaces solitoniques en deux dimensions soient décrites par une famille de surfaces à un paramètre, paramétrisées par le paramètre spectral λ [32]. L'applicabilité de la formule de Sym-Tafel à des problèmes géométriques liés à des équations solitoniques a été étendue. En particulier, de nouvelles informations ont été ajoutées à sa forme originale [6; 13; 14].

CHAPITRE 4

TRANSFORMATIONS DE JAUGES ET PROBLÈME LINÉAIRE SIMPLIFIÉ

4.1 Transformations de jauges des équations de Gauss-Weingarten

Nous décrivons dans ce chapitre une nouvelle méthode permettant de déterminer la fonction d'onde appartenant au groupe de Lie spécial unitaire

$$\Phi(\lambda; z, \bar{z}) \in SU(2) \quad (4.1)$$

définissant une immersion conforme d'une surface plongée dans $\mathfrak{su}(2)$ par la relation (3.103)

$$F^{ST} = \Phi^{-1}(z, \bar{z}, \lambda) \partial_{\lambda} \Phi(z, \bar{z}, \lambda) \in \mathfrak{su}(2). \quad (4.2)$$

Ce faisant, nous simplifions le **PL** (3.66) en considérant un problème équivalent ayant pour solution une fonction d'onde holomorphe. La deuxième égalité de (3.66) sera donc de la forme $\bar{\partial}\tilde{\Psi} = 0$. Contrairement à la formulation de la fonction d'onde en (3.103), la formulation (4.2) exprime une paramétrisation par des variables complexe et complexe conjuguée. L'objet résultant est le même.

Par un choix judicieux de jauge, nous introduisons le paramètre spectral et les fonctions arbitraires holomorphes η et χ de la formule (3.22) dans le problème, créant un lien entre la résolution du **PL** et la forme explicite de la surface associée plongée dans \mathbb{R}^3 . Nous prenons comme point de départ le fait que les équations du repère mobile (3.66) sont décrites par le système

$$\partial\Phi = \mathcal{U}\Phi, \quad \bar{\partial}\Phi = \mathcal{V}\Phi, \quad (4.3)$$

où $\mathcal{V} = -\mathcal{U}^{\dagger}$ et $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Considérons l'action du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sur les équations du **PL** (4.3). La méthode que nous proposons consiste à agir sur les équations du **PL** à l'aide de jauges

$$M_k \in SL(2, \mathbb{C}), \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

afin de produire à chaque étape une nouvelle fonction d'onde Φ_k et de nouvelles matrices de potentiel $\mathcal{U}_k, \mathcal{V}_k \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ formant un nouveau PL_k découlant des transformations de jauge effectuées. Ainsi, à la $k^{\text{ième}}$ étape, le PL_k considéré sera de la forme

$$\partial\Phi_k = \mathcal{U}_k\Phi_k, \quad \bar{\partial}\Phi_k = \mathcal{V}_k\Phi_k, \quad \mathcal{U}_k, \mathcal{V}_k \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.5)$$

Remarque. À chaque étape entre 0 et N , nous obtenons un problème équivalent PL_k , mais en général, nous aurons $\Phi_k \notin SU(2)$. Il importe de garder à l'esprit que les fonctions d'onde qui sont d'intérêt sont les fonctions d'onde initiale $\Phi = \Phi_0 \in SU(2)$ et finale $\Psi = \Phi_N \in SU(2)$.

4.1.1 Méthode en cascade pour l'immersion des surfaces dans \mathbb{R}^3

Étape I_0 .

L'étape I_0 consiste en une initialisation basée sur les hypothèses déjà admises et les résultats montrés précédemment. Notamment, sous les contraintes de paramétrisation conforme, de compatibilité (Gauss-Weingarten) et de minimalité (surfaces minimales), la solution (u, H, Q) des équations de Gauss-Mainardi-Codazzi s'écrit

$$u = 2\log(\eta\bar{\eta}(1 + \chi\bar{\chi})), \quad H = 0, \quad Q = -\eta^2\partial\chi. \quad (4.6)$$

Puisque l'ordre des matrices est de 2, que $\dim(\mathfrak{su}(2)) = 4$, et que la courbure moyenne H est nulle, alors les matrices de potentiel sont de la forme (3.70)

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{4} & -Qe^{-u/2} \\ 0 & -\frac{\partial u}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\partial} u}{4} & 0 \\ \bar{Q}e^{-u/2} & \frac{\bar{\partial} u}{4} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.7)$$

Étape I_1 .

Pour un certain $M_1 \in SL(2)$, considérons la fonction d'onde modifiée Φ_1

$$\Phi_1 = M_1 \Phi \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \partial \Phi_1 = \partial (M_1 \Phi) \quad (4.9)$$

$$\Leftrightarrow \partial \Phi_1 = (\partial M_1) \Phi + M_1 (\partial \Phi). \quad (4.10)$$

En utilisant (4.3) et (4.8), l'égalité (4.10) devient

$$\Leftrightarrow \partial \Phi_1 = (\partial M_1) M_1^{-1} \Phi_1 + M_1 \mathcal{U} M_1^{-1} \Phi_1 \quad (4.11)$$

$$\Leftrightarrow \partial \Phi_1 = \underbrace{((\partial M_1) M_1^{-1} + M_1 \mathcal{U} M_1^{-1})}_{:= \mathcal{U}_1} \Phi_1 \quad (4.12)$$

De manière analogue, nous trouvons que

$$\bar{\partial} \Phi_1 = \underbrace{((\bar{\partial} M_1) M_1^{-1} + M_1 \mathcal{V} M_1^{-1})}_{:= \mathcal{V}_1} \Phi_1 \quad (4.13)$$

et le **PL** modifié devient

$$\partial \Phi_1 = \mathcal{U}_1 \Phi_1 \quad \bar{\partial} \Phi_1 = \mathcal{V}_1 \Phi_1 \quad (\text{PL}_1) \quad (4.14)$$

où $\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1 \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. La matrice M_1 la plus simple, déterminée de façon non-arbitraire à des fins de simplification, serait

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^{u/4} & 0 \\ 0 & e^{-u/4} \end{pmatrix} \in SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C}) \quad (4.15)$$

et ainsi, de (4.12), les deux termes composant \mathcal{U}_1 sont

$$(\partial M_1)M_1^{-1} = \frac{\partial u}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_1 \mathcal{U} M_1^{-1} = \frac{\partial u}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{2} & -Q \\ 0 & -\frac{\partial u}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.17)$$

De manière analogue, nous trouvons que

$$\mathcal{V}_1 = \bar{Q} e^{-u} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.18)$$

Par les relations (4.6), le terme en évidence peut être exprimé en terme des fonctions η et χ

$$\bar{Q} e^{-u} = \bar{\partial} \underbrace{\left(\frac{1}{\mu \chi (1 + \chi \bar{\chi})} \right)}_{:=a} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\partial} a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (4.20)$$

où $\mu := \eta^2$, et ainsi, par (4.17) et (4.20), le PL_1 (4.14) s'écrit

$$\partial \Phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{2} & -Q \\ 0 & -\frac{\partial u}{2} \end{pmatrix} \Phi_1, \quad \bar{\partial} \Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\partial} a & 0 \end{pmatrix} \Phi_1. \quad (4.21)$$

Étape I_2 .

Nous cherchons $M_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ telle que $\mathcal{V}_2 \equiv 0$. Si le problème peut être satisfait avec cette condition, alors celle-ci servira de critère d'arrêt forcé à la procédure. Posons $M_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$.

En reprenant la forme (4.13) pour \mathcal{V}_2 , nous obtenons

$$(\bar{\partial} M_2) M_2^{-1} + M_2 \mathcal{V}_1 M_2^{-1} = 0 \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\partial} M_2) M_2^{-1} = -M_2 \mathcal{V}_1 M_2^{-1} \quad (4.23)$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\partial} M_2) = -M_2 \mathcal{V}_1 \quad (4.24)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{V}_1 = -M_2^{-1} (\bar{\partial} M_2). \quad (4.25)$$

Or, de (4.20), l'expression pour \mathcal{V}_1 est connue et la relation (4.25) devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\partial} a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_4 & m_2 \\ m_3 & -m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\partial} m_1 & \bar{\partial} m_2 \\ \bar{\partial} m_3 & \bar{\partial} m_4 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Nous trouvons que $M_2 = \mathbb{I}_2 - a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ est une solution particulière satisfaisant (4.26) et effectuons une nouvelle transformation de jauge sur la fonction d'onde, *i.e.*

$$\Phi_2 = M_2 \Phi_1 = (M_2 M_1) \Phi = \begin{pmatrix} e^{u/4} & 0 \\ -ae^{u/4} & e^{-u/4} \end{pmatrix} \Phi. \quad (4.27)$$

Dans ce contexte, la fonction d'onde Φ_2 est telle que

$$\bar{\partial} \Phi_2 = 0 \quad (4.28)$$

puisque $\mathcal{V}_2 = 0$ par hypothèse ajoutée. Aussi, Φ_2 doit être holomorphe, car Φ l'est par hypothèse initiale de la méthode. De (4.3), nous pouvons écrire

$$\partial \Phi_2 = \mathcal{U}_2 \Phi_2, \quad \bar{\partial} \Phi_2 = 0 \quad (\text{PL}_2) \quad (4.29)$$

où

$$\mathcal{U}_2 = (\partial M_2)M_2^{-1} + M_2 \mathcal{U}_1 M_2^{-1} \quad (4.30)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial u - aQ & -Q \\ -a\partial u + a^2Q - \partial a & aQ - \frac{1}{2}\partial u \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.31)$$

Utilisant les relations (4.6) et (4.19), nous pouvons exprimer \mathcal{U}_2 en terme des fonctions η et χ

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \partial \log(\eta\chi) & \eta^2 \partial \chi \\ 0 & -\partial \log(\eta\chi) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.32)$$

Étape I_3 .

Nous cherchons \mathcal{U}_3 telle que

$$\partial \Phi_3 = \mathcal{U}_3 \Phi_3, \quad \mathcal{U}_3 = (\partial M_3)M_3^{-1} + M_3 \mathcal{U}_2 M_3^{-1}. \quad (4.33)$$

Posons $M_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta\chi} & 0 \\ 0 & \eta\chi \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$. Alors

$$(\partial M_3)M_3^{-1} = -\partial \log(\eta\chi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 \mathcal{U}_2 M_3^{-1} = \begin{pmatrix} \partial \log(\eta\chi) & \frac{\partial \chi}{\chi^2} \\ 0 & -\partial \log(\eta\chi) \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial \left(\frac{1}{\chi} \right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.35)$$

La fonction d'onde

$$\Phi_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\chi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (4.36)$$

satisfait la relation le problème résultant

$$\partial \Phi_3 = \mathcal{U}_3 \Phi_3, \quad \bar{\partial} \Phi_3 = 0. \quad (\text{PL}_3) \quad (4.37)$$

Étape I_4 .

Il est maintenant possible de déterminer la fonction d'onde Φ satisfaisant au **PL** de départ (4.3) en procédant à rebours car

$$\Phi_3 = \underbrace{M_3 M_2 M_1}_{M \in SL(2, \mathbb{C})} \Phi \quad (4.38)$$

$$\Leftrightarrow \Phi = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \Phi_3 \quad (4.39)$$

$$\Leftrightarrow \Phi = \frac{1}{(1 + \chi \bar{\chi})^{1/2}} \begin{pmatrix} \left(\frac{\eta}{\bar{\eta}}\right)^{1/2} \chi & -\left(\frac{\eta}{\bar{\eta}}\right)^{1/2} \\ \left(\frac{\bar{\eta}}{\eta}\right)^{1/2} & \left(\frac{\bar{\eta}}{\eta}\right)^{1/2} \bar{\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Posons $\eta = r e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors

$$\Phi(z, \bar{z}, \theta) = \frac{1}{(1 + \chi \bar{\chi})^{1/2}} \begin{pmatrix} \chi e^{i\theta} & -e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & \bar{\chi} e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2), \quad (4.41)$$

où θ agit à titre de paramètre spectral. Nous calculons finalement les facteurs composant la représentation de type Sym-Tafel (4.2) de la surface dans $\mathfrak{su}(2)$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{(1 + \chi \bar{\chi})^{1/2}} \begin{pmatrix} \bar{\chi} e^{-i\theta} & e^{i\theta} \\ -e^{-i\theta} & \chi e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

$$\partial_\theta \Phi = \frac{1}{(1 + \chi \bar{\chi})^{1/2}} \begin{pmatrix} i\chi e^{i\theta} & -ie^{i\theta} \\ -ie^{-i\theta} & -i\bar{\chi} e^{-i\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

$$\Rightarrow F^{ST} = \frac{-i}{1 + \chi \bar{\chi}} \begin{pmatrix} 1 - \chi \bar{\chi} & 2\bar{\chi} \\ 2\chi & -1 + \chi \bar{\chi} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2) \sim \mathbb{R}^3, \quad \bar{\partial}\chi = 0, \quad Q \neq 0, \quad (4.44)$$

i.e. que la méthode permet l'application de la formule d'immersion de Sym-Tafel (3.103).

4.1.2 Méthode en cascade pour l'immersion des surfaces dans $H^3(\lambda)$

Par une méthode identique à celle présentée à la section 4.1.1, nous simplifions le problème linéaire (3.99) associé au repère mobile de surfaces de courbure moyenne constante λ plongées dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$. À partir des mêmes jauges $M_k \in SL(2, \mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3$, nous obtenons les matrices de potentiel intermédiaires

$$\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{2} & -Q \\ \lambda & -\frac{\partial u}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \partial \log(\eta\chi) & \eta^2 \partial \chi \\ \lambda & -\partial \log(\eta\chi) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial \left(\frac{1}{\chi}\right) \\ \lambda \eta^2 \chi^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\partial} a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathcal{V}_3 = \mathbf{0}, \quad (4.46)$$

où $\mathcal{U}_k, \mathcal{V}_k \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $k = 1, 2, 3$. Ainsi, après trois transformations de jauges, le problème simplifié s'écrit

$$\partial \Phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\partial \left(\frac{1}{\chi}\right) \\ \lambda \eta^2 \chi^2 & 0 \end{pmatrix} \Phi_3, \quad \bar{\partial} \Phi_3 = \mathbf{0}. \quad (4.47)$$

Considérons une solution Φ_3 sous la forme d'une série de puissances en λ

$$\Phi_3 = \Lambda_0 + \lambda \Lambda_1 + \lambda^2 \Lambda_2 + \dots \quad (4.48)$$

et la décomposition de la matrice de potentiel $\mathcal{U}_3 := U_0 + \lambda U_1$, où

$$U_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\partial \frac{1}{\chi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta^2 \chi^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

L'existence du développement (4.48) est assurée par le fait que la fonction d'onde Φ_3 dépend des fonctions arbitraires η et χ ; elle est donc elle-même arbitraire. La première équation du **PL** (4.47) devient

$$\partial(\Lambda_0 + \lambda \Lambda_1 + \dots) = (U_0 + \lambda U_1)(\Lambda_0 + \lambda \Lambda_1 + \dots), \quad (4.50)$$

équation à résoudre par la méthode des coefficients indéterminés pour chaque puissance de λ , menant à la relation de récurrence

$$\partial \Lambda_0 = U_0 \Lambda_0, \quad \partial \Lambda_j = U_0 \Lambda_j + U_1 \Lambda_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.51)$$

Pour $\lambda = 0$, nous trouvons la solution particulière du **PL** (4.47)

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\chi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (4.52)$$

Par substitution de (4.49) et (4.52) dans la relation de récurrence (4.51) pour $j = 1$, nous trouvons

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\chi} \int^z \eta^2 \chi^2 d\xi - \int^z \eta^2 d\xi & \frac{1}{\chi} \int^z \eta^2 \chi d\xi - \int^z \eta^2 d\xi \\ \int^z \eta^2 \chi^2 d\xi & -\int^z \eta^2 \chi d\xi \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Les matrices Λ_j , $j = 2, 3, \dots$ sont calculées par la récurrence (4.51). La solution du **PL** initial (3.91) peut être calculée par la relation (4.39)

$$\Phi = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \Phi_3,$$

permettant de calculer directement la formule d'immersion de type Sym-Tafel (3.94)

$$F = \frac{1}{\lambda} \Phi^\dagger \Phi \in H^3(\lambda).$$

L'immersion d'une surface minimale dans l'espace euclidien peut alors être obtenue de la formule (3.97)

$$\tilde{F} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\Phi^\dagger \Phi - \mathbb{I}_2) \in \mathbb{R}^3. \quad (4.54)$$

Nous appliquons une nouvelle transformation de jauge au système (4.47) à partir de la jauge

$$M_4 := \Lambda_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\chi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (4.55)$$

et obtenons la matrice de potentiel singulière

$$\mathcal{U}_4 = \lambda \eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (4.56)$$

En laissant tomber les indices et en posant $\mathcal{U} := \mathcal{U}_4$ et $\Psi := \Phi_4$, le **PL** simplifié résultant sera noté

$$\partial \Psi = \underbrace{\lambda \eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix}}_{:= \mathcal{U}} \Psi, \quad \bar{\partial} \Psi = 0, \quad (4.57)$$

où $\bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Le système (4.57) a été obtenu par transformation de jauge $\Psi = M \Phi$ de la solution du **PL** (3.91), où

$$M = M_4 M_3 M_2 M_1 \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (4.58)$$

Remarque. Le **PL** (4.57) correspond au système (3.73). Il est d'intérêt car il sera utilisé en tant que système simplifié à résoudre dans les sections et chapitres subséquents.

4.2 EDO du second ordre découlant des surfaces CMC- λ

La sélection des surfaces CMC- λ est déterminée par le **PL** pour la fonction d'onde holomorphe Ψ . Posons

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T. \quad (4.59)$$

Nous aurions pu poser Ψ comme étant une matrice 2×2 ; nous aurions alors considéré le même objet, dans un espace différent. Ainsi, Ψ satisfait au système (3.73)

$$\partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.60)$$

sujet à la condition initiale $z = z_0$: $\Psi(z_0) = \Psi_0$, où

$$\mathcal{U} = \lambda \eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

En posant la transformation linéaire $\varphi(z) = \Psi_1(z)\chi(z) - \Psi_2(z)$, le système peut être transformé en deux équations différentielles ordinaires selon les composantes de la fonction d'onde Ψ

$$\partial \Psi_1 = \lambda \eta^2 \varphi, \quad \partial \Psi_2 = \lambda \eta^2 \varphi \chi, \quad (4.62)$$

ou de manière équivalente, en une EDO du second ordre en Ψ_1

$$\partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{\partial \eta}{\eta} \partial \Psi_1 - \lambda \eta^2 \partial \chi \Psi_1 = 0. \quad (4.63)$$

En effet, en réécrivant l'équation matricielle et en exprimant Ψ_2 en fonction de Ψ_1 , nous trouvons

$$\partial \Psi_1 = \lambda \eta^2 (\chi \Psi_1 - \Psi_2) \quad (4.64)$$

$$\Leftrightarrow \Psi_2 = \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \quad (4.65)$$

et

$$\partial\Psi_2 = \lambda\eta^2(\chi^2\Psi_1 - \chi\Psi_2) \Leftrightarrow \partial\Psi_2 = \lambda\eta^2\left(\chi^2\Psi_1 - \chi\left(\chi\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_1}{\lambda\eta^2}\right)\right). \quad (4.66)$$

En dérivant Ψ_1 une seconde fois, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \partial^2\Psi_1 &= 2\lambda\eta\partial\eta(\chi\Psi_1 - \Psi_2) + \lambda\eta^2(\partial\chi\Psi_1 + \chi\partial\Psi_1 - \partial\Psi_2) \\ \Leftrightarrow \partial^2\Psi_1 &= 2\lambda\eta\partial\eta\chi\Psi_1 - 2\lambda\eta\partial\eta\left(\chi\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_1}{\lambda\eta^2}\right) + \lambda\eta^2\partial\chi\Psi_1 + \lambda\eta^2\chi\partial\Psi_1 \\ &\quad - \lambda\eta^2\left(\lambda\eta^2\left(\chi^2\Psi_1 - \chi\left(\chi\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_1}{\lambda\eta^2}\right)\right)\right) \\ \Leftrightarrow \partial^2\Psi_1 - 2\frac{\partial\eta}{\eta}\partial\Psi_1 - \lambda\eta^2\partial\chi\Psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.3 Méthode pour la résolution du problème linéaire et la détermination des surfaces solitoniques associées

L'EDO (4.67) est centrale dans la méthode utilisée au chapitre 5. Les coefficients de cette EDO y seront associés aux coefficients de diverses EDOs décrivant des polynômes orthogonaux. Cette association permettra simultanément la résolution du **PL** associé à la famille de surfaces solitoniques recherchée ainsi que la détermination de la forme explicite de cette famille de surfaces en termes des fonctions η et χ .

Soit une EDO de la forme

$$\Delta: \quad \partial^2\omega + \frac{q(z)}{p(z)}\partial\omega + \frac{r(z)}{p(z)}\omega = 0. \quad (4.68)$$

La méthode suivante permet de déterminer les surfaces associées aux solutions décrites par cette EDO.

Étape 1. Association des variables.

$$(\Psi_1, z) \longleftrightarrow (\omega, z). \quad (4.69)$$

Étape 2. Association des coefficients.

$$-2 \frac{\partial \eta}{\eta} = \frac{q(z)}{p(z)}, \quad (4.70)$$

$$-\lambda \eta^2 \partial \chi = \frac{r(z)}{p(z)}. \quad (4.71)$$

L'équation (4.70) permet de déterminer la fonction méromorphe $\eta(z)$. Ce résultat est substitué dans l'équation (4.71) afin de déterminer la fonction méromorphe $\chi(\lambda; z)$.

Étape 3. Détermination de la matrice de potentiel $\mathcal{U}(\Delta, \lambda; z)$ en termes des fonctions $\eta(z)$ et $\chi(\lambda; z)$ tel que définie en (4.61).

Étape 4. Détermination de la fonction d'onde $\Psi(\Delta, \lambda; z)$ en termes des composantes Ψ_1 et Ψ_2 . La composante Ψ_1 correspond à la solution générale de l'équation (4.67); celle-ci doit donc être résolue. La composante Ψ_2 est décrite par la relation (4.65).

Remarque. Les éléments $\mathcal{U}(\Delta, \lambda; z)$ et $\Psi(\Delta, \lambda; z)$ calculés vérifient le **PL**. Les étapes subséquentes consistent à déterminer la forme explicite de la famille de surfaces solitoniques associée au **PL** solutionné.

Étape 5. Calculer la famille de surfaces solitoniques minimales décrite par la représentation d'Enneper-Weierstrass $F \in \mathbb{R}^3$ en termes des fonctions $\eta(z)$ et $\chi(\lambda; z)$, telle que décrite en (3.22).

Étape 6. Calculer la description quaternionique de la famille de surfaces minimales décrite par $\tilde{F} \in \mathfrak{su}(2)$ en termes des fonctions $\eta(z)$ et $\chi(\lambda; z)$, telle que décrite en (3.65).

Étape 7. Fixer le paramètre spectral λ à une valeur réelle non nulle pour sélectionner une surface en particulier. Fixer les constantes d'intégration et les paramètres de l'EDO (4.68). Calculer les surfaces résultantes F_0 et \tilde{F}_0 .

4.4 Représentation d'une EDO du second ordre par un système d'ordre premier

Après transformations de jauges, le **PL** simplifié (3.73) s'écrit

$$\partial\Psi = \lambda\eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \Psi, \quad \bar{\partial}\Psi = 0. \quad (4.72)$$

Nous démontrons qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ permettant d'exprimer le problème par la formulation alternative

$$\Psi = A\partial\Psi, \quad \bar{\partial}\Psi = 0, \quad (4.73)$$

où par hypothèse, la fonction d'onde $\Psi(z)$ est solution du **PL** et où les composantes de la matrice A $a_{i,j}(z)$, $i, j = 1, 2$ sont des fonctions méromorphes. La matrice de potentiel \mathcal{U} décrite en (4.61) est singulière, car $\det(\mathcal{U}) = 0$, et ainsi A ne peut être son inverse multiplicatif. L'intérêt d'une telle forme provient du fait qu'une EDO $\Delta(z; \omega, \partial\omega, \partial^2\omega) = 0$ linéaire homogène du second ordre peut être représentée par un système différentielle matricielle linéaire homogène d'ordre premier (réduction de l'ordre).

Théorème. Toute EDO linéaire homogène du second ordre de la forme

$$p(z)\partial^2\omega + q(z)\partial\omega + r(z)\omega = 0 \quad (4.74)$$

telle que les coefficients sont intégrables non nuls, peut être ramenée à la forme équivalente

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \partial \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

où la variable indépendante ω peut être identifiée à $\tilde{\Psi}_1$ ou à $\tilde{\Psi}_2$. De plus, si ω est identifiée à $\tilde{\Psi}_1$, la composante a_{22} doit être identiquement nulle et les composantes a_{11} , a_{12} et a_{21} ne peuvent l'être alors que si ω est identifiée à $\tilde{\Psi}_2$, la composante a_{11} doit être identiquement nulle et les composantes a_{12} , a_{21} et a_{22} ne peuvent l'être.

Preuve. Le système considéré est équivalent au système

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_1 &= a_{11}\partial\tilde{\Psi}_1 + a_{12}\partial\tilde{\Psi}_2, \\ \tilde{\Psi}_2 &= a_{21}\partial\tilde{\Psi}_1 + a_{22}\partial\tilde{\Psi}_2.\end{aligned}\tag{4.76}$$

Dans un premier temps, nous identifions ω à $\tilde{\Psi}_1$. En substituant $\partial\tilde{\Psi}_2 = \partial a_{21}\partial\tilde{\Psi}_1 + a_{21}\partial^2\tilde{\Psi}_1 + \partial a_{22}\partial\tilde{\Psi}_2 + a_{22}\partial^2\tilde{\Psi}_2$ dans la première équation, nous obtenons

$$a_{12}a_{21}\partial^2\tilde{\Psi}_1 + a_{12}a_{22}\partial^2\tilde{\Psi}_2 + (a_{12}\partial a_{21} + a_{11})\partial\tilde{\Psi}_1 + a_{12}\partial a_{22}\partial\tilde{\Psi}_2 - \tilde{\Psi}_1 = 0,\tag{4.77}$$

qui peut être vu comme un système sous-déterminé comportant une équation et deux inconnues, pour $a_{i,j}(z)$, $i, j = 1, 2$ fixés. Cette équation s'écrit alors de manière implicite par

$$G(z; \tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_2, \partial^2\tilde{\Psi}_1, \partial^2\tilde{\Psi}_2) = 0.\tag{4.78}$$

Il existe donc des entiers naturels $i_0, j_0 \in \{1, 2\}$ telles que $a_{i_0, j_0}(z) \equiv 0$. Analysons toutes les possibilités afin de déterminer celles qui sont compatibles avec une EDO du second ordre d'une seule variable indépendante.

$$\text{Cas 1. } a_{11}(z) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad G = G_1(z; \tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_2, \partial^2\tilde{\Psi}_1, \partial^2\tilde{\Psi}_2) = 0.$$

$$\text{Cas 2. } a_{12}(z) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad G = G_2(z; \tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_1) = 0.$$

$$\text{Cas 3. } a_{21}(z) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad G = G_3(z; \tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_1, \partial\tilde{\Psi}_2, \partial^2\tilde{\Psi}_2) = 0.$$

Cas 4. $a_{22}(z) \equiv 0 \Rightarrow G = G_4(z; \tilde{\Psi}_1, \partial \tilde{\Psi}_1, \partial^2 \tilde{\Psi}_1) = 0$.

Nous concluons que la composante a_{22} doit être identiquement nulle alors que les composantes a_{11} , a_{12} et a_{21} ne peuvent l'être. L'équation du second ordre en $\tilde{\Psi}_1$ exprimée par le système d'ordre premier devient

$$a_{21} \partial^2 \tilde{\Psi}_1 + \frac{a_{12} \partial a_{21} + a_{11}}{a_{12}} \partial \tilde{\Psi}_1 - \frac{1}{a_{12}} \tilde{\Psi}_1 = 0. \quad (4.79)$$

Le système (4.75) devient

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \partial \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

et nous complétons cette partie de la preuve en posant

$$p(z) = a_{21}, \quad q(z) = \frac{a_{12} \partial a_{21} + a_{11}}{a_{12}}, \quad r(z) = -\frac{1}{a_{12}}. \quad (4.81)$$

Dans un deuxième temps, nous identifions ω à $\tilde{\Psi}_2$. En substituant $\partial \tilde{\Psi}_1 = \partial a_{11} \partial \tilde{\Psi}_1 + a_{11} \partial^2 \tilde{\Psi}_1 + \partial a_{12} \partial \tilde{\Psi}_2 + a_{12} \partial^2 \tilde{\Psi}_2$ dans la deuxième équation, nous obtenons

$$a_{11} a_{21} \partial^2 \tilde{\Psi}_1 + a_{12} a_{21} \partial^2 \tilde{\Psi}_2 + (a_{21} \partial a_{12} + a_{22}) \partial \tilde{\Psi}_2 + a_{21} \partial a_{11} \partial \tilde{\Psi}_1 - \tilde{\Psi}_2 = 0, \quad (4.82)$$

qui peut être vu comme un système sous-déterminé comportant une équation et deux inconnues, pour $a_{i,j}(z)$, $i, j = 1, 2$ fixés. Cette équation s'écrit alors de manière implicite par

$$G(z; \tilde{\Psi}_2, \partial \tilde{\Psi}_1, \partial \tilde{\Psi}_2, \partial^2 \tilde{\Psi}_1, \partial^2 \tilde{\Psi}_2) = 0. \quad (4.83)$$

Il existe donc des entiers naturels $i_0, j_0 \in \{1, 2\}$ telles que $a_{i_0, j_0}(z) \equiv 0$. Analysons toutes les possibilités afin de déterminer celles qui sont compatibles avec une EDO du second ordre d'une seule variable indépendante.

$$\text{Cas 1. } a_{11}(z) \equiv 0 \Rightarrow G = G_1(z; \tilde{\Psi}_2, \partial \tilde{\Psi}_2, \partial^2 \tilde{\Psi}_2) = 0.$$

$$\text{Cas 2. } a_{12}(z) \equiv 0 \Rightarrow G = G_2(z; \tilde{\Psi}_2, \partial \tilde{\Psi}_1, \partial^2 \tilde{\Psi}_1) = 0.$$

$$\text{Cas 3. } a_{21}(z) \equiv 0 \Rightarrow G = G_3(z; \tilde{\Psi}_2, \partial \tilde{\Psi}_2) = 0.$$

$$\text{Cas 4. } a_{22}(z) \equiv 0 \Rightarrow G = G_4(z; \tilde{\Psi}_2, \partial \tilde{\Psi}_1, \partial \tilde{\Psi}_2, \partial^2 \tilde{\Psi}_1, \partial^2 \tilde{\Psi}_2) = 0.$$

Nous concluons que la composante a_{11} doit être identiquement nulle alors que les composantes a_{12} , a_{21} et a_{22} ne peuvent l'être. L'équation du second ordre en $\tilde{\Psi}_2$ exprimée par le système d'ordre premier devient

$$a_{21} \partial^2 \tilde{\Psi}_2 + \frac{a_{21} \partial a_{12} + a_{22}}{a_{12}} \partial \tilde{\Psi}_2 - \frac{1}{a_{12}} \tilde{\Psi}_2 = 0. \quad (4.84)$$

Le système (4.75) devient

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \partial \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

et nous complétons cette partie de la preuve en posant

$$p(z) = a_{21}, \quad q(z) = \frac{a_{21} \partial a_{12} + a_{22}}{a_{12}}, \quad r(z) = -\frac{1}{a_{12}}. \quad (4.86)$$

□

Nous venons de montrer que par identification des coefficients de l'équation (4.68) avec les coefficients de l'EDO (4.67) découlant du système d'ordre premier, la variable ω peut être identifiée à $\tilde{\Psi}_1$ ou à $\tilde{\Psi}_2$ (supposons $\omega = \tilde{\Psi}_1$, sans perte de généralité). En d'autres termes, $\tilde{\Psi}_1$ est solution de l'EDO considérée comme dans la section précédente et ainsi $\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1$, où Ψ_1 est la première composante de la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ qui est solution du **PL**.

Nous montrons maintenant que $\tilde{\Psi}_2 \neq \Psi_2$. Pour ce faire, nous étudions le lien entre la matrice A et la matrice de potentiel \mathcal{U} du **PL**. La fonction d'onde solution Ψ est solution du **PL**

$$\partial\Psi = \mathcal{U}\Psi, \quad \bar{\partial}\Psi = \mathbf{0} \quad (4.87)$$

et il n'existe aucune matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ telle que

$$\Psi = A\partial\Psi, \quad \bar{\partial}\Psi = \mathbf{0}. \quad (4.88)$$

En effet, nous pouvons supposer qu'une telle matrice existe pour montrer que cela mène à une contradiction. Par cette hypothèse, Ψ est à la fois solution du **PL** et $\Psi = A\partial\Psi$. Nous remarquons d'abord que si Ψ_1 est identifiée à ω (sans perte de généralité), alors $a_{22} \equiv 0$ et a_{11} , a_{12} , a_{21} non identiquement nuls implique que $\det(A) = -a_{12}a_{21} \neq 0$ et ainsi A est inversible. Le système d'ordre premier est donc équivalent au système

$$\partial\Psi = A^{-1}\Psi, \quad \bar{\partial}\Psi = \mathbf{0}. \quad (4.89)$$

Or, la première relation du **PL** est $\partial\Psi = \mathcal{U}\Psi$ donc

$$(\mathcal{U} - A^{-1})\Psi = \mathbf{0}. \quad (4.90)$$

La relation est vérifiée si et seulement si $(\mathcal{U} - A^{-1}) = \mathbf{0}$ ou $\Psi = \mathbf{0}$. Or, la fonction d'onde Ψ est non nulle donc $\mathcal{U} = A^{-1}$, une contradiction, puisque \mathcal{U} n'est pas inversible. Ainsi, bien qu'une EDO puisse être décrite par un système d'ordre premier, le **PL** ne peut être exprimé sous la forme (4.75).

CHAPITRE 5

SURFACES SOLITONIQUES ASSOCIÉES À DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

5.1 Analyses de cas

La stratégie proposée est de déterminer les fonctions holomorphes $\eta_\Delta(z)$ et $\chi_\Delta(z)$ associée à des polynômes orthogonaux, où la dépendance en Δ fait référence à l'équation considérée. Ces fonctions sont déterminées par la comparaison des coefficients de l'EDO Δ (4.68) fixée et des coefficients de l'EDO linéaire du second ordre découlant des surfaces CMC- λ (4.67). Rappelons que cette EDO découle de l'hypothèse que la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ satisfait la relation $\partial\Psi = \mathcal{U}\Psi$. Or, $\mathcal{U}(\lambda; z)$ dépend de η et χ ; nous pouvons ainsi déterminer entièrement \mathcal{U} et Ψ . La représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22) et la description quaternionique (3.65) sont ensuite utilisées pour décrire la forme explicite de la surface associée à la solution de Δ , et ce dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Les représentations intégrales de chaque composante des surfaces sont simplifiées/calculées afin de réduire le temps de calcul lors de la saisie dans un logiciel de calcul symbolique.

La détermination des fonctions méromorphes η et χ permet de calculer explicitement les formules d'immersion (3.22) et (3.65). Dans le cadre des analyses de cas qui suivent, nous identifierons chaque composante des représentations d'Enneper-Weierstrass dans \mathbb{R}^3 et quaternionique dans $\mathfrak{su}(2)$ par (F_1, F_2, F_3) et par $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ respectivement.

En posant

$$I_1 := \int_{\xi_0}^{\xi} \eta^2 dz, \quad I_2 := \int_{\xi_0}^{\xi} \chi^2 \eta^2 dz, \quad I_3 := \int_{\xi_0}^{\xi} \chi \eta^2 dz, \quad (5.1)$$

la surface (3.22) plongée dans \mathbb{R}^3 devient

$$F(\Delta, \lambda; z) = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_1 - I_2), -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(I_1 + I_2), \operatorname{Re}(I_3) \right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad (5.2)$$

et la surface (3.65) plongée dans $\mathfrak{su}(2)$ devient

$$\tilde{F}(\Delta, \lambda; z) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} I_3 + \bar{I}_3 & I_1 - \bar{I}_2 \\ -I_2 + \bar{I}_1 & -(I_3 + \bar{I}_3) \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2), \quad (5.3)$$

où $Tr(\tilde{F}) = 0$ et $\tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}$. Ces formes seront utilisées dans la plupart des cas pour morceler les calculs. Nous montrons finalement que la représentation de la surface est consistante en s'assurant que la forme explicite des différentes composantes du **PL** que nous trouvons sont effectivement des solutions dudit problème.

5.1.1 Équation de Legendre

L'équation de Legendre [26] en ω s'écrit

$$\Delta: \quad (1 - z^2)\partial^2\omega - 2z\partial\omega + \alpha(\alpha + 1)\omega = 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \quad z \neq \pm 1. \quad (5.4)$$

Comparant les coefficients de (5.4) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -2\frac{z}{1-z^2} &= -2\frac{\partial\eta}{\eta} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2} &= -\lambda\eta^2\partial\chi, \\ \Leftrightarrow \quad \eta^2(z) &= \frac{c_1^2}{1-z^2} & \chi(z) &= -\frac{\alpha(\alpha+1)z+c_2}{\lambda c_1^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$ et $z \neq \pm 1$. La matrice de potentiel \mathcal{U} (4.61) devient donc

$$\mathcal{U}(\alpha, \lambda; z) = \lambda\eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$= \lambda c_1^2 (1 - z^2)^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(\alpha+1)z+c_2}{\lambda c_1^2} & -1 \\ \frac{(\alpha(\alpha+1)z+c_2)^2}{\lambda^2 c_1^4} & \frac{\alpha(\alpha+1)z+c_2}{\lambda c_1^2} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(\alpha+1)z+c_2}{1-z^2} & -\frac{\lambda c_1^2}{1-z^2} \\ \frac{(\alpha(\alpha+1)z+c_2)^2}{\lambda c_1^2(1-z^2)} & \frac{\alpha(\alpha+1)z+c_2}{1-z^2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}). \quad (5.8)$$

En effectuant la substitution de η et χ (5.5) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Legendre (5.4) en Ψ_1

$$\begin{aligned} & \partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{\frac{c_1 z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}} \partial \Psi_1 + \frac{\lambda c_1^2 \alpha(\alpha+1)}{1-z^2} \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{z}{1-z^2} \partial \Psi_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2} \Psi_1 = 0 \end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi_1(z) = k_1 P_\alpha(z) + k_2 Q_\alpha(z), \quad (5.9)$$

où $P_\alpha(z)$ et $Q_\alpha(z)$ sont respectivement les fonctions de Legendre de première et de seconde espèce d'ordre α . Si α est un entier positif, alors $P_\alpha(z)$ est polynomial et s'exprime par la formule de Rodrigues [26]

$$P_\alpha(z) = \frac{(-1)^\alpha}{2^\alpha \alpha!} \partial^\alpha (1-z^2)^\alpha, \quad (5.10)$$

$$Q_\alpha(z) = \int_0^\infty \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \cosh(t) \right)^{-\alpha-1} dt + \frac{1}{2} (\log(z-1) - \log(-z-1)) P_\alpha(z), \quad (5.11)$$

où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{Re}(z) > 1$. La définition de $P_\alpha(z)$ et de $Q_\alpha(z)$ varie selon que α est pair ou impair, entier ou non, etc. Aussi, il existe plusieurs cas à considérer pour la convergence et l'existence de ces solutions. Les polynômes de Legendre sont orthogonaux pour α entier positif. Pour α quelconque, on généralise avec les fonctions de Legendre. Par (4.65), nous trouvons pour la

deuxième composante de la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$

$$\begin{aligned}\Psi_2(z) &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\ &= -\frac{\alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2} [k_1 P_\alpha(z) + k_2 Q_\alpha(z)] - \frac{\partial (k_1 P_\alpha(z) + k_2 Q_\alpha(z))}{\lambda c_1^2} (1 - z^2).\end{aligned}$$

Or, par l'identité 8.5.4 de [1],

$$\begin{aligned}(z^2 - 1)\partial P_\alpha(z) &= \alpha z P_\alpha(z) - \alpha P_{\alpha-1}(z), \\ (z^2 - 1)\partial Q_\alpha(z) &= \alpha z Q_\alpha(z) - \alpha Q_{\alpha-1}(z),\end{aligned}\tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Psi_2(z) &= \frac{1}{\lambda c_1^2} [k_1 (P_\alpha(z)(\alpha(\alpha+2)z + c_2) - \alpha P_{\alpha-1}(z)) \\ &\quad + k_2 (Q_\alpha(z)(\alpha(\alpha+2)z + c_2) - \alpha Q_{\alpha-1}(z))].\end{aligned}\tag{5.13}$$

La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(\alpha, \lambda; z) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z, \alpha) \\ \Psi_2(z, \alpha, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 P_\alpha(z) + k_2 Q_\alpha(z) \\ \frac{1}{\lambda c_1^2} [k_1 (P_\alpha(z)(\alpha(\alpha+2)z + c_2) - \alpha P_{\alpha-1}(z)) \\ + k_2 (Q_\alpha(z)(\alpha(\alpha+2)z + c_2) - \alpha Q_{\alpha-1}(z))] \end{pmatrix},\tag{5.14}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration arbitraires, $z \neq \pm 1$, et λ est le paramètre spectral du **PL**. Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{c_1^2}{2} [\log(1+z) - \log(1-z)]_{\xi_0}^\xi, \\ I_2 &= \frac{1}{2\lambda^2 c_1^4} [(\alpha(\alpha+1) + c_2)^2 \log(1+z) - (\alpha(\alpha+1) - c_2)^2 \log(1-z) - 2\alpha^2(\alpha+1)^2 z]_{\xi_0}^\xi, \\ I_3 &= \frac{1}{2\lambda} [(\alpha(\alpha+1) - c_2) \log(1-z) + (\alpha(\alpha+1) + c_2) \log(1+z)]_{\xi_0}^\xi.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$F_1 = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1^4} [(\lambda^2 c_1^4 - (\alpha(\alpha+1) + c_2)^2) \log(1+z) - (\lambda^2 c_1^4 - (\alpha(\alpha+1) - c_2)^2) \log(1-z) + 2\alpha^2(\alpha+1)^2 z]_{\xi_0}^{\xi} \right), \quad (5.16)$$

$$F_2 = -\frac{1}{4} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1^4} [(\lambda^2 c_1^4 + (\alpha(\alpha+1) + c_2)^2) \log(1+z) - (\lambda^2 c_1^4 + (\alpha(\alpha+1) - c_2)^2) \log(1-z) - 2\alpha^2(\alpha+1)^2 z]_{\xi_0}^{\xi} \right), \quad (5.17)$$

$$F_3 = \frac{1}{2\lambda} \operatorname{Re} \left([(\alpha(\alpha+1) - c_2) \log(1-z) + (\alpha(\alpha+1) + c_2) \log(1+z)]_{\xi_0}^{\xi} \right). \quad (5.18)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\tilde{F}_{11} = -\frac{i}{4} \left(\frac{1}{\lambda} [(\alpha(\alpha+1) - c_2) \log(1-z) + (\alpha(\alpha+1) + c_2) \log(1+z)]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda} \overline{[(\alpha(\alpha+1) - c_2) \log(1-z) + (\alpha(\alpha+1) + c_2) \log(1+z)]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \quad (5.19)$$

$$\tilde{F}_{12} = -\frac{i}{4} \left(c_1^2 [\log(1+z) - \log(1-z)]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda^2 c_1^4} [(\alpha(\alpha+1) + c_2)^2 \log(1+z) - (\alpha(\alpha+1) - c_2)^2 \log(1-z) - 2\alpha^2(\alpha+1)^2 z]_{\xi_0}^{\xi} \right), \quad (5.20)$$

$$\tilde{F}_{21} = \frac{i}{4} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1^4} [(\alpha(\alpha+1) + c_2)^2 \log(1+z) - (\alpha(\alpha+1) - c_2)^2 \log(1-z) - 2\alpha^2(\alpha+1)^2 z]_{\xi_0}^{\xi} - c_1^2 [\log(1+z) - \log(1-z)]_{\xi_0}^{\xi} \right), \quad (5.21)$$

$$\tilde{F}_{22} = \frac{i}{4} \left(\frac{1}{\lambda} [(\alpha(\alpha+1) - c_2) \log(1-z) + (\alpha(\alpha+1) + c_2) \log(1+z)]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda} [(\alpha(\alpha+1) - c_2) \log(1-z) + (\alpha(\alpha+1) + c_2) \log(1+z)]_{\xi_0}^{\xi} \right). \quad (5.22)$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes de la fonction $\log(1 \pm z)$. La famille de surfaces possède donc des points de branchement en $\{\pm 1, \infty\}$.

Cas particulier.

Posons $\alpha = 1$. Alors l'équation de Legendre devient $(1 - z^2)\partial^2 \omega - 2z\partial \omega + 2\omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{c_1^2}{1-z^2}$ et $\chi = -\frac{2z+c_2}{\lambda c_1^2}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $\lambda = -2$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1}{1-z^2}, \quad \chi = z, \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.23)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(1, -2; z) = \frac{2}{z^2 - 1} \begin{pmatrix} z & -1 \\ z^2 & -z \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.24)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(1, -2; z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \left(1 + \frac{1}{2} (\log(1-z) - \log(1+z))\right) + 1 \\ \frac{1}{2} (z^2 + z + 1 - (z^2 + 1) \tanh^{-1}(z)) \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F(1, -2; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(z \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right) \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left([\log(1+z) - \log(1-z) - z]_{\xi_0}^{\xi} \right) \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\log(1-z^2) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.26)$$

et les composantes de la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$

$$\tilde{F}(1, -2; z) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad \text{Tr}(\tilde{F}) = 0 \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F} \quad (5.27)$$

s'écrivent

$$\tilde{F}_{11} = \frac{i}{4} \left(\log(1 - z^2) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\log(1 - z^2) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \quad (5.28)$$

$$\tilde{F}_{12} = -\frac{i}{4} \left((\log(1 + z) - \log(1 - z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{(\log(1 + z) - \log(1 - z) - 2z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \quad (5.29)$$

$$\tilde{F}_{21} = \frac{i}{4} \left((\log(1 + z) - \log(1 - z) - 2z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{(\log(1 + z) - \log(1 - z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \quad (5.30)$$

$$\tilde{F}_{22} = -\frac{i}{4} \left(\log(1 - z^2) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\log(1 - z^2) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right). \quad (5.31)$$

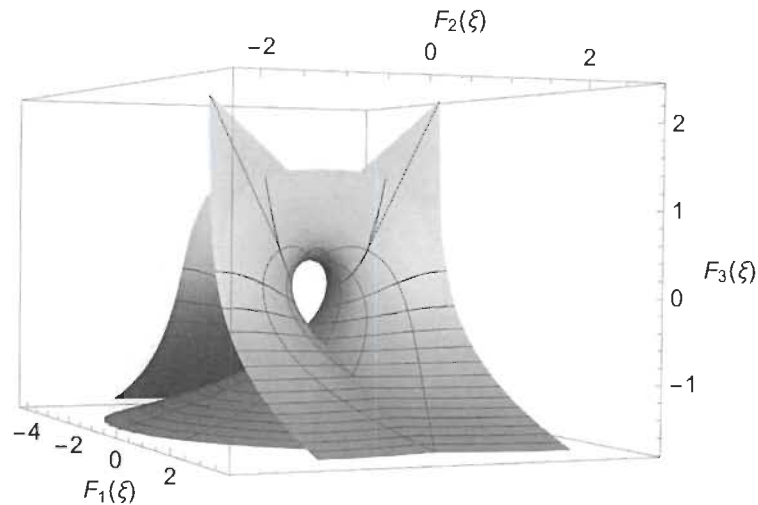


Figure 5.1 Représentation de l'équation de Legendre dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.1 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = \frac{1}{2} + i$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [-8, 8]$, $\theta \in [0, 6\pi]$.

5.1.2 Équation de Legendre associée

L'équation de Legendre associée [26] en ω s'écrit

$$\Delta: (1-z^2)\partial^2\omega - 2z\partial\omega + \left(\alpha(\alpha+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)\omega = 0, \quad \alpha, m \in \mathbb{N}, m \neq 0, z \neq \pm 1. \quad (5.32)$$

Comparant les coefficients de (5.32) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -2\frac{z}{1-z^2} &= -2\frac{\partial\eta}{\eta}, & \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2} - \frac{m^2}{(1-z^2)^2} &= -\lambda\eta^2\partial\chi, \\ \Leftrightarrow \eta_\Delta^2(z) &= \frac{c_1^2}{1-z^2}, & \chi_\Delta(z) &= \frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$, $z \neq \pm 1$. La matrice de potentiel (4.61) devient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \lambda\eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \\ &= \lambda c_1^2 (1-z^2)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2} & -1 \\ \left(\frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2}\right)^2 & -\frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{1-z^2} & -\frac{\lambda c_1^2}{(1-z^2)} \\ \frac{\left(\frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2(1-z^2)}\right)^2}{\lambda c_1^2(1-z^2)} & -\frac{\frac{m^2}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{1-z^2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

car $Tr(\mathcal{U}(z, \alpha, \lambda)) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.33) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Legendre associée (5.32) en Ψ_1

$$\begin{aligned} & \partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{z}{1-z^2} \partial \Psi_1 + \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2} - \frac{m^2}{(1-z^2)^2} \right) \Psi_1 = 0 \end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi_1(z) = k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.35)$$

où $P_\alpha^m(z)$ et $Q_\alpha^m(z)$ sont respectivement les polynômes de Legendre associés de première et de seconde espèce d'ordre α et de degré m . Le polynôme de Legendre et son polynôme associé sont liés par la relation [26]

$$P_\alpha^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \partial^m P_\alpha(z). \quad (5.36)$$

En utilisant la formule de Rodrigues pour P_α (5.10), nous trouvons que

$$\begin{aligned} P_\alpha^m(z) &= (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \partial^m P_\alpha(z) \\ &= (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \partial^m \frac{(-1)^{2\alpha}}{2^\alpha \alpha!} \partial^\alpha (z^2 - 1)^\alpha, \\ &= \frac{(1 - z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^\alpha \alpha!} \partial^{m+\alpha} (z^2 - 1)^\alpha, \quad m, \alpha \in \mathbb{N}, \quad m \neq 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow \quad \partial P_\alpha^m(z) = \frac{(z^2 - 1)^{m/2}}{2^\alpha \alpha!} [mz(1 - z^2)^{-1} \partial^{m+\alpha} (z^2 - 1)^\alpha + \partial^{m+\alpha+1} (z^2 - 1)^\alpha]. \quad (5.38)$$

De même,

$$Q_\alpha^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \partial^m Q_\alpha(z), \quad m, \alpha \in \mathbb{N}, \quad m \neq 0. \quad (5.39)$$

Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\
 &= \frac{\frac{m^2}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2}{\lambda c_1^2} [k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z)] \\
 &\quad - \frac{\partial (k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z))}{\lambda c_1^2} (1-z^2) \\
 &= \frac{1}{\lambda c_1^2} \left[\left(\frac{m^2}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2 \right) [k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z)] \right. \\
 &\quad \left. + k_1 \frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^\alpha \alpha!} (mz \partial^{m+\alpha} (z^2-1)^\alpha + (z^2-1) \partial^{m+\alpha+1} (z^2-1)^\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + k_2 (z^2-1)^{m/2} (mz \partial^m Q_\alpha(z) + (z^2-1) \partial^{m+1} Q_\alpha(z)) \right]. \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(\alpha, m, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z) \\ \frac{1}{\lambda c_1^2} \left[\left(\frac{m^2}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) - \alpha(\alpha+1)z + c_2 \right) [k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z)] \right. \\ \left. + k_1 \frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^\alpha \alpha!} (mz \partial^{m+\alpha} (z^2-1)^\alpha + (z^2-1) \partial^{m+\alpha+1} (z^2-1)^\alpha) \right. \\ \left. + k_2 (z^2-1)^{m/2} (mz \partial^m Q_\alpha(z) + (z^2-1) \partial^{m+1} Q_\alpha(z)) \right] \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration arbitraires, $z \neq \pm 1$, $m, \alpha \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ et λ est le paramètre spectral du **PL**. Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$I_1 = \frac{c_1^2}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi},$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{24\lambda^2 c_1^2} \left(-24\alpha^2 z - 48\alpha^3 z - 24\alpha^4 z - m^4 \log^3(1-z) + 12c_2^2 \log(1+z) \right. \\
& + 24c_2 \alpha \log(1+z) + 12\alpha^2 \log(1+z) + 24c_2 \alpha^2 \log(1+z) + 24\alpha^3 \log(1+z) \\
& + 12\alpha^4 \log(1+z) + 6c_2 m^2 \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha^2 \log^2(1+z) \\
& + m^4 \log^3(1+z) + 3m^2 \log^2(1-z)(2c_2 - 2\alpha(\alpha+1) + m^2 \log(1+z)) \\
& - \log(1-z)(12c_2^2 - 24c_2 \alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)(12\alpha + 12\alpha^2 - m^2 \log(16777216))) \\
& \left. + 12m^2(c_2 + \alpha + \alpha^2) \log(1+z) + 3m^4 \log^2(1+z) - 24m^2 \alpha(\alpha+1) Li_2\left(\frac{1-z}{2}\right) \right) \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}, \\
I_3 = & \frac{1}{8\lambda} \left(m^2 \log(1-z)^2 + \log(1-z)(4(\alpha(\alpha+1) - c_2) - 2m^2 \log(1+z)) \right. \\
& \left. + \log(1+z)(4(\alpha(\alpha+1) + c_2) + m^2 \log(1+z)) \right) \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}, \quad (5.43)
\end{aligned}$$

où $Li_n(z)$ est la fonction polylogarithmique [22] définie par

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}, \quad |z| \leq 1. \quad (5.44)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 F_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left[\frac{c_1^2}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) \right. \right. \\
 - \frac{1}{24\lambda^2 c_1^2} (-24\alpha^2 z - 48\alpha^3 z - 24\alpha^4 z - m^4 \log^3(1-z) + 12c_2^2 \log(1+z) \\
 + 24c_2 \alpha \log(1+z) + 12\alpha^2 \log(1+z) + 24c_2 \alpha^2 \log(1+z) + 24\alpha^3 \log(1+z) \\
 + 12\alpha^4 \log(1+z) + 6c_2 m^2 \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha^2 \log^2(1+z) \\
 + m^4 \log^3(1+z) + 3m^2 \log^2(1-z)(2c_2 - 2\alpha(\alpha+1) + m^2 \log(1+z)) \\
 - \log(1-z)(12c_2^2 - 24c_2 \alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)(12\alpha + 12\alpha^2 - m^2 \log(16777216)) \\
 \left. \left. + 12m^2(c_2 + \alpha + \alpha^2) \log(1+z) + 3m^4 \log^2(1+z)) - 24m^2 \alpha(\alpha+1) \operatorname{Li}_2((1-z)/2) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}, \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\left[\frac{c_1^2}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) \right. \right. \\
 + \frac{1}{24\lambda^2 c_1^2} (-24\alpha^2 z - 48\alpha^3 z - 24\alpha^4 z - m^4 \log^3(1-z) + 12c_2^2 \log(1+z) \\
 + 24c_2 \alpha \log(1+z) + 12\alpha^2 \log(1+z) + 24c_2 \alpha^2 \log(1+z) + 24\alpha^3 \log(1+z) \\
 + 12\alpha^4 \log(1+z) + 6c_2 m^2 \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha^2 \log^2(1+z) \\
 + m^4 \log^3(1+z) + 3m^2 \log^2(1-z)(2c_2 - 2\alpha(\alpha+1) + m^2 \log(1+z)) \\
 - \log(1-z)(12c_2^2 - 24c_2 \alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)(12\alpha + 12\alpha^2 - m^2 \log(16777216)) \\
 \left. \left. + 12m^2(c_2 + \alpha + \alpha^2) \log(1+z) + 3m^4 \log^2(1+z)) - 24m^2 \alpha(\alpha+1) \operatorname{Li}_2((1-z)/2) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}, \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{1}{8\lambda} (m^2 \log(1-z)^2 + \log(1-z)(4(\alpha(\alpha+1) - c_2) - 2m^2 \log(1+z)) \right. \right. \\
 \left. \left. + \log(1+z)(4(\alpha(\alpha+1) + c_2) + m^2 \log(1+z)) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} = & -\frac{i}{16} \left(\frac{1}{\lambda} [m^2 \log(1-z)^2 + \log(1-z)(4(\alpha(\alpha+1) - c_2) - 2m^2 \log(1+z)) \right. \\ & \left. + \log(1+z)(4(\alpha(\alpha+1) + c_2) + m^2 \log(1+z))]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda} [m^2 \log(1-z)^2 + \log(1-z)(4(\alpha(\alpha+1) - c_2) - 2m^2 \log(1+z)) \right. \\ & \left. + \log(1+z)(4(\alpha(\alpha+1) + c_2) + m^2 \log(1+z))]_{\xi_0}^{\xi} \right), \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{12} = & -\frac{i}{4} \left([c_1^2 (\log(1+z) - \log(1-z))]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & - \frac{1}{12\lambda^2 c_1^2} [(-24\alpha^2 z - 48\alpha^3 z - 24\alpha^4 z - m^4 \log^3(1-z) + 12c_2^2 \log(1+z) \\ & + 24c_2 \alpha \log(1+z) + 12\alpha^2 \log(1+z) + 24c_2 \alpha^2 \log(1+z) + 24\alpha^3 \log(1+z) \\ & + 12\alpha^4 \log(1+z) + 6c_2 m^2 \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha^2 \log^2(1+z) \\ & + m^4 \log^3(1+z) + 3m^2 \log^2(1-z)(2c_2 - 2\alpha(\alpha+1) + m^2 \log(1+z)) \\ & - \log(1-z)(12c_2^2 - 24c_2 \alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)(12\alpha + 12\alpha^2 - m^2 \log(16777216)) \\ & + 12m^2(c_2 + \alpha + \alpha^2) \log(1+z) + 3m^4 \log^2(1+z)) - 24m^2 \alpha(\alpha+1) Li_2((1-z)/2)]_{\xi_0}^{\xi} \left. \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{21} = & \frac{i}{4} \left(\frac{1}{12\lambda^2 c_1^2} [-24\alpha^2 z - 48\alpha^3 z - 24\alpha^4 z - m^4 \log^3(1-z) + 12c_2^2 \log(1+z) \right. \\ & + 24c_2 \alpha \log(1+z) + 12\alpha^2 \log(1+z) + 24c_2 \alpha^2 \log(1+z) + 24\alpha^3 \log(1+z) \\ & + 12\alpha^4 \log(1+z) + 6c_2 m^2 \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha \log^2(1+z) + 6m^2 \alpha^2 \log^2(1+z) \\ & + m^4 \log^3(1+z) + 3m^2 \log^2(1-z)(2c_2 - 2\alpha(\alpha+1) + m^2 \log(1+z)) \\ & - \log(1-z)(12c_2^2 - 24c_2 \alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)(12\alpha + 12\alpha^2 - m^2 \log(16777216)) \\ & + 12m^2(c_2 + \alpha + \alpha^2) \log(1+z) + 3m^4 \log^2(1+z)) - 24m^2 \alpha(\alpha+1) Li_2((1-z)/2)]_{\xi_0}^{\xi} \\ & \left. - [c_1^2 (\log(1+z) - \log(1-z))]_{\xi_0}^{\xi} \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{22} = & \frac{i}{16} \left(\frac{1}{\lambda} [m^2 \log(1-z)^2 + \log(1-z)(4(\alpha(\alpha+1) - c_2) - 2m^2 \log(1+z)) \right. \\ & \left. + \log(1+z)(4(\alpha(\alpha+1) + c_2) + m^2 \log(1+z))]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda} [m^2 \log(1-z)^2 + \log(1-z)(4(\alpha(\alpha+1) - c_2) - 2m^2 \log(1+z)) \right. \\ & \left. + \log(1+z)(4(\alpha(\alpha+1) + c_2) + m^2 \log(1+z))]_{\xi_0}^{\xi} \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes des fonctions $\log(1 \pm z)$ et $Li_2((1 - z)/2)$. La famille de surfaces possède donc des points de branchement en $\{\pm 1, \infty\}$.

Cas particulier.

Posons $\alpha = 1$ et $m = 1$. Alors l'équation de Legendre associée devient $(1 - z^2)\partial^2 \omega - 2z\partial \omega + \left(2 - \frac{1}{1-z^2}\right)\omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{c_1^2}{1-z^2}$ et $\chi = \frac{\frac{1}{2}(\log(1+z) - \log(1-z)) - 2z + c_2}{\lambda c_1^2}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1, c_2 = 0, k_1 = 1, k_2 = -1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1}{1-z^2}, \quad \chi = \log(1+z) - \log(1-z) - 4z, \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.52)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}\left(1, 1, \frac{1}{2}; z\right) = \begin{pmatrix} \frac{\log(1+z) - \log(1-z) - 4z}{2(1-z^2)} & -\frac{1}{2(1-z^2)} \\ \frac{(\log(1+z) - \log(1-z) - 4z)^2}{2(1-z^2)} & -\frac{\log(1+z) - \log(1-z) - 4z}{2(1-z^2)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.53)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi\left(1, 1, \frac{1}{2}; z\right) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2 - 1} + \frac{(z^2 - 1)(\log(1-z) - \log(1+z)) + 2z}{\sqrt{z^2 - 1}} \\ -\frac{2z(2(z^2 - 1)\tan^{-1}(z) + z(z+6) - 1)}{\sqrt{z^2 - 1}} \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Les composantes de la représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass

$$F\left(1, 1, \frac{1}{2}; z\right) = (F_1, F_2, F_3)^T \in \mathbb{R}^3 \quad (5.55)$$

s'écrivent

$$F_1 = \frac{1}{2} \Re e \left(\left[-\frac{15}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) + 4z \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} \Im m \left(\left[\frac{17}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) - 4z \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),$$

$$F_3 = 2 \Re e \left([\log(z^2 - 1)]_{\xi_0}^{\xi} \right).$$

Les composantes de la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2), \quad Tr(\tilde{F}) = 0, \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F} \quad (5.56)$$

s'écrivent

$$\tilde{F}_{11} = -i \left(\log(z^2 - 1) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\log(z^2 - 1) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right),$$

$$\tilde{F}_{12} = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{2} (\log(1+z) - \log(1-z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + 8 \cdot \overline{2z + \log(1-z) - \log(1+z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right),$$

$$\tilde{F}_{21} = -\frac{i}{2} \left(8(2z + \log(1-z) - \log(1+z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{2} \cdot \overline{\log(1+z) - \log(1-z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right),$$

$$\tilde{F}_{22} = i \left(\log(z^2 - 1) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\log(z^2 - 1) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right). \quad (5.57)$$

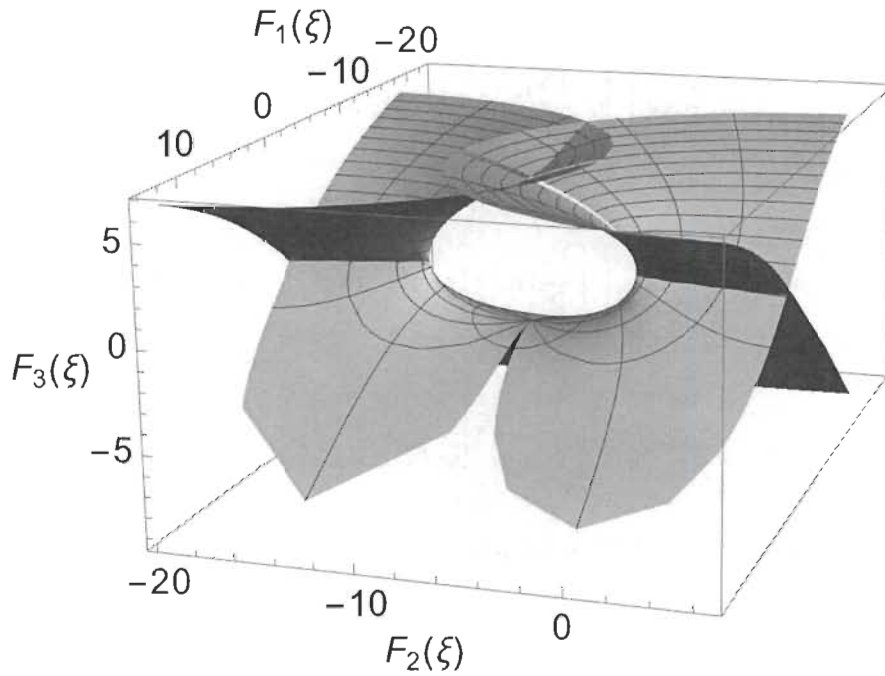


Figure 5.2 Représentation de l'équation de Legendre associée dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.2 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = -1 - i$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [-5, 5]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

5.1.3 Équation de Bessel

L'équation de Bessel [26] en ω s'écrit

$$\Delta: \quad z^2 \partial^2 \omega + z \partial \omega + (z^2 - p^2) \omega = 0, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (5.58)$$

Comparant les coefficients de (5.58) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= -2 \frac{\partial \eta}{\eta}, & \frac{z^2 - p^2}{z^2} &= -\lambda \eta^2 \partial \chi \\ \Leftrightarrow \quad \eta_{\Delta}^2(z) &= c_1 z^{-1}, & \chi_{\Delta}(z) &= \frac{1}{\lambda c_1} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right), \end{aligned} \quad (5.59)$$

où $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. La matrice de potentiel \mathcal{U} (4.61) devient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(z, p, \lambda) &= \lambda \eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \\ &= \lambda c_1 z^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda c_1} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) & -1 \\ \frac{1}{\lambda^2 c_1^2} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right)^2 & -\frac{1}{\lambda c_1} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) & -\frac{\lambda c_1}{z} \\ \frac{1}{\lambda c_1} \frac{1}{z} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right)^2 & -\frac{1}{z} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5.60)$$

En effectuant la substitution de η et χ (5.59) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Bessel (5.58) en Ψ_1

$$\begin{aligned} &\partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{\partial(c_1 z^{-\frac{1}{2}})}{c_1 z^{-\frac{1}{2}}} \partial \Psi_1 - \lambda \eta^2 \left(-\frac{1}{\lambda \eta^2} \frac{z^2 - p^2}{z^2} \right) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow &z^2 \partial^2 \Psi_1 + z \partial \Psi_1 + (z^2 - p^2) \Psi_1 = 0. \end{aligned}$$

La solution de cette équation s'écrit

$$\Psi_1(z) = k_1 \mathcal{J}_p(z) + k_2 \mathcal{Y}_p(z) \quad (5.61)$$

et s'exprime en termes des fonctions de Bessel de première $\mathcal{J}_p(z)$ et de seconde espèce $\mathcal{Y}_p(z)$, d'ordre p et définies par [1]

$$\mathcal{J}_p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p}}{k! \Gamma(k+p+1)}, \quad \mathcal{Y}_p(z) := \frac{J_p(z) \cos(p\pi) - J_{-p}(z)}{\sin(p\pi)}, \quad (5.62)$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler [1] définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (5.63)$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, la formule de Rodrigues pour la fonction de Bessel de première espèce [21] s'énonce

$$\mathcal{J}_p(z) = 2^{-p} e^{2/z} \partial^p z^{2p} e^{-2/z}. \quad (5.64)$$

Par (4.65), la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ est

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\ &= \frac{1}{\lambda c_1} \left[\left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \Psi_1 - z \partial (k_1 \mathcal{J}_p(z) + k_2 \mathcal{Y}_p(z)) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda c_1} \left[\left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \Psi_1 - \frac{z}{2} (k_1 (\mathcal{J}_{p-1}(z) - \mathcal{J}_{p+1}(z)) + k_2 (\mathcal{Y}_{p-1}(z) - \mathcal{Y}_{p+1}(z))) \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(p, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 \mathcal{J}_p(z) + k_2 \mathcal{Y}_p(z) \\ \frac{1}{\lambda c_1} \left[k_1 \left(-\frac{z}{2} \mathcal{J}_{p-1}(z) + \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \mathcal{J}_p(z) + \frac{z}{2} \mathcal{J}_{p+1}(z) \right) + k_2 \left(\mathcal{Y}_{p-1}(z) + \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \mathcal{Y}_p(z) - \mathcal{Y}_{p+1}(z) \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$\begin{aligned} I_1 &= c_1 \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\ I_2 &= \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left(\log(z) \left(c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) + \frac{z^2}{16} (-8c_2 + 4p^2 + z^2) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\ I_3 &= \frac{p^2}{2\lambda} \log^2(z) - \frac{z^2}{4\lambda} + \frac{c_2}{\lambda} \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\left(\lambda^2 c_1^2 - c_2^2 + \frac{p^2 z^2}{2} \right) \log(z) - c_2 p^2 \log^2(z) - \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (4p^2 - 8c_2 + z^2) \frac{z^2}{16} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right) \\
 F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\left(\lambda^2 c_1^2 + c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) \log(z) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (4p^2 - 8c_2 + z^2) \frac{z^2}{16} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right) \\
 F_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \log(z) + \frac{p^2}{2} \log^2(z) - \frac{z^2}{4} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \tag{5.68}
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(\left[\frac{p^2}{2\lambda} \log^2(z) - \frac{z^2}{4\lambda} + \frac{c_2}{\lambda} \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\left[\frac{p^2}{2\lambda} \log^2(z) - \frac{z^2}{4\lambda} + \frac{c_2}{\lambda} \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right) \\
 \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(c_1 \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\left[\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left(\log(z) \left(c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) + \frac{z^2}{16} (-8c_2 + 4p^2 + z^2) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right) \\
 \tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\left[\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left(\log(z) \left(c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) + \frac{z^2}{16} (-8c_2 + 4p^2 + z^2) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \overline{c_1 \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right) \\
 \tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(\left[\frac{p^2}{2\lambda} \log^2(z) - \frac{z^2}{4\lambda} + \frac{c_2}{\lambda} \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\left[\frac{p^2}{2\lambda} \log^2(z) - \frac{z^2}{4\lambda} + \frac{c_2}{\lambda} \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right). \tag{5.69}
 \end{aligned}$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes de la fonction $\log(z)$.

La famille de surfaces possède donc des points de branchement en $\{0, \infty\}$.

Cas particulier.

Posons $p = 0$. Alors l'équation de Bessel devient $z^2 \partial^2 \omega + z \partial \omega + z^2 \omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{c_1}{z}$ et $\chi = -\frac{z^2 + c_2}{2\lambda c_1}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et $\lambda = -1/2$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1}{z}, \quad \chi = z^2, \quad \bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0. \quad (5.70)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U} \left(0, -\frac{1}{2}; z \right) = -\frac{1}{2z} \begin{pmatrix} z^2 & -1 \\ z^4 & -z^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.71)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi \left(0, -\frac{1}{2}; z \right) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_0(z) + \mathcal{Y}_0(z) \\ z(z(\mathcal{I}_0(z) + \mathcal{Y}_0(z)) - 2(\mathcal{I}_1(z) + \mathcal{Y}_1(z))) \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F \left(0, -\frac{1}{2}; z \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(\log(z) - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\left(\log(z) + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ \operatorname{Re} \left[\left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.73)$$

et la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrit

$$\tilde{F} \left(0, -\frac{1}{2}; z \right) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} z^2 \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{z^2 \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{z^4}{4} \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \\ -\frac{z^4}{4} \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & - \left(z^2 \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{z^2 \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right) \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad (5.74)$$

$$\operatorname{Tr}(\tilde{F}) = 0, \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}. \quad (5.75)$$

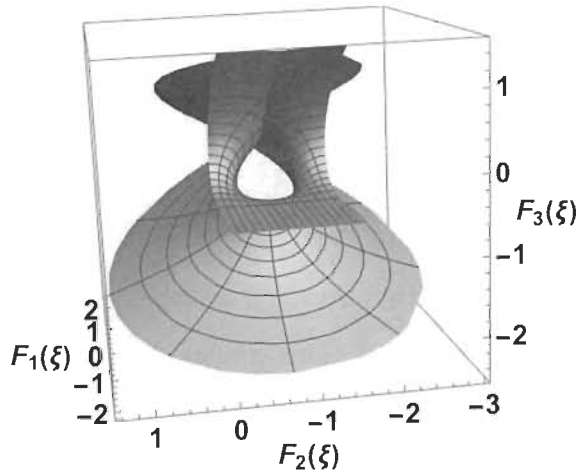


Figure 5.3 Représentation de l'équation de Bessel dans \mathbb{R}^3 , $\theta \in [0, \pi]$.

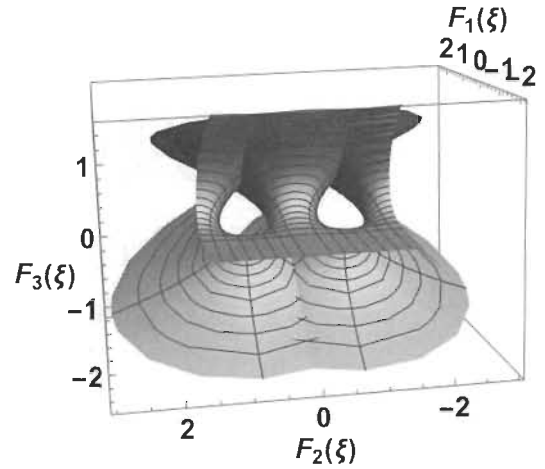


Figure 5.4 Représentation de l'équation de Bessel dans \mathbb{R}^3 , $\theta \in [0, 2\pi]$.

Remarque. La figure 5.3 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 1$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [\frac{1}{100}, 2]$, $\theta \in [0, \pi]$, alors que la figure 5.4 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 1$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [\frac{1}{100}, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, rajoutant une anse à la surface.

5.1.4 Équation de Chebyshev de première espèce

L'équation de Chebyshev de première espèce [3] en ω s'écrit

$$\Delta: \quad (1 - z^2)\partial^2 \omega - z\partial \omega + n^2 \omega = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \neq \pm 1. \quad (5.76)$$

Comparant les coefficients de (5.76) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{z}{1-z^2} &= -2\frac{\partial \eta}{\eta}, & \frac{n^2}{1-z^2} &= -\lambda \eta^2 \partial \chi, \\ \eta^2(z) &= \frac{c_1}{\sqrt{1-z^2}}, & \chi(z) &= -\frac{n^2 \arcsin(z) + c_2}{\lambda c_1}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

où $z \neq 0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$. La matrice de potentiel (4.61) devient donc

$$\mathcal{U}(n, \lambda; z) = \frac{\lambda c_1}{\sqrt{1-z^2}} \begin{pmatrix} -\frac{n^2 \arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1} & -1 \\ \frac{(n^2 \arcsin(z)+c_2)^2}{\lambda^2 c_1^2} & \frac{n^2 \arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1} \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{n^2 \arcsin(z)+c_2}{\sqrt{1-z^2}} & -\frac{\lambda c_1}{\sqrt{1-z^2}} \\ \frac{(n^2 \arcsin(z)+c_2)^2}{\lambda c_1 \sqrt{1-z^2}} & \frac{n^2 \arcsin(z)+c_2}{\sqrt{1-z^2}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.79)$$

où c_1 et λ sont non-nuls, $z \neq \pm 1$ et $Tr(\mathcal{U}(z, n, \lambda)) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.77) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Chebyshev (5.76) en Ψ_1

$$\begin{aligned} & \partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{\sqrt{c_1}/2(1-z^2)^{-5/4}}{\sqrt{c_1}(1-z^2)^{-1/4}} \partial \Psi_1 + (\lambda c_1 (1-z^2)^{-1/2} n^2 \lambda^{-1} c_1^{-1} (1-z^2)^{-1/2}) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (1-z^2) \partial^2 \Psi_1 - z \partial \Psi_1 + n^2 \Psi_1 = 0, \end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi_1(z) = k_1 T_n(z) + k_2 \sqrt{1-z^2} U_{n-1}(z), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.80)$$

où $T_n(z)$ et $U_{n-1}(z)$ sont respectivement le polynôme de Chebyshev de premier espèce d'ordre n et le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce d'ordre $n-1$. Par la formule de Rodrigues [1],

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} (1-z^2)^{1/2}}{2^n (n-1/2)!} \partial^n (1-z^2)^{n-1/2}, \\ U_{n-1}(z) &= \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} (n+1/2)! (1-z^2)^{1/2}} \partial^n (1-z^2)^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Nous avons de plus la représentation intégrale [1]

$$T_n(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{(1-\tau^2) \tau^{-(n+1)}}{1-2\tau z + \tau^2} d\tau, \quad (5.81)$$

où l'intégrale est prise sur un contour fermé englobant l'origine. Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\
 &= -\frac{n^2 \arcsin(z) + c_2}{\lambda c_1} \left[k_1 T_n(z) + k_2 \sqrt{1-z^2} U_{n-1}(z) \right] \\
 &\quad - \lambda^{-1} c_1^{-1} \left(k_1 \partial T_n(z) + k_2 \partial \left(\sqrt{1-z^2} U_{n-1}(z) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\lambda c_1} \left[-k_1 (n^2 \arcsin(z) + c_2) T_n(z) + \frac{k_1 (n+1)}{\sqrt{1-z^2}} T_{n-2}(z) \right. \\
 &\quad \left. + \left(-k_2 (n^2 \arcsin(z) + c_2) \sqrt{1-z^2} + \frac{k_1 n - 2k_2 z}{\sqrt{1-z^2}} \right) U_{n-1}(z) \right], \quad (5.82)
 \end{aligned}$$

car $\partial T_n(z) = n U_{n-1}(z)$ [36] et $(1-z^2) \partial U_n(z) = -n z U_n(z) + (n+1) T_{n-1}(z)$ [37]. La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(n, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 T_n(z) + k_2 \sqrt{1-z^2} U_{n-1}(z) \\ \frac{1}{\lambda c_1} \left[-k_1 (n^2 \arcsin(z) + c_2) T_n(z) + \frac{k_1 (n+1)}{\sqrt{1-z^2}} T_{n-2}(z) \right. \\ \left. + \left(-k_2 (n^2 \arcsin(z) + c_2) \sqrt{1-z^2} + \frac{k_1 n - 2k_2 z}{\sqrt{1-z^2}} \right) U_{n-1}(z) \right] \end{pmatrix}, \quad (5.83)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration arbitraires, $z \neq \pm 1$ et λ est le paramètre spectral du **PL**. Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 I_1 &= c_1 \cdot \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\
 I_2 &= \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \arcsin(z) - n^2 c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^4}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\
 I_3 &= -\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n^2}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.84)
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[(\lambda^2 c_1^2 - c_2^2) \arcsin(z) + n^2 c_2 \arcsin^2(z) - \frac{n^4}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[(\lambda^2 c_1^2 + c_2^2) \arcsin(z) - n^2 c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^4}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ F_3 &= -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n^2}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n^2}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n^2}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(c_1 \cdot \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \arcsin(z) - n^2 c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^4}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \arcsin(z) - n^2 c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^4}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \overline{c_1 \cdot \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{22} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n^2}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n^2}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes de la fonction $\arcsin(z)$.

La famille de surfaces possède donc des points de branchement en $\{\pm 1, \infty\}$.

Cas particulier.

Posons $n = 1$. Alors l'équation de Chebyshev de première espèce devient $(1 - z^2) \partial^2 \omega - z \partial \omega + \omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{c_1}{\sqrt{1-z^2}}$ et $\chi = -\frac{\arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et $\lambda = -1$. Les

fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \chi = \arcsin(z), \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.87)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(1, -1; z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \begin{pmatrix} \arcsin(z) & -1 \\ \arcsin^2(z) & -\arcsin(z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.88)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(1, -1; z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) + i \sinh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) \\ \cosh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) (\arcsin(z) + i \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}}) \\ + \sinh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) (\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} + i \arcsin(z)) \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F(1, -1; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Re e \left[(\arcsin(z) - \frac{1}{3} \arcsin^3(z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ -\frac{1}{2} \Im m \left[(\arcsin(z) + \frac{1}{3} \arcsin^3(z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ \frac{1}{2} \Re e \left[\arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.90)$$

et la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrit

$$\tilde{F}(1, -1; z) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{3} \arcsin^3(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \\ -\frac{1}{3} \arcsin^3(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & -\frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad (5.91)$$

$$Tr(\tilde{F}) = 0, \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}. \quad (5.92)$$

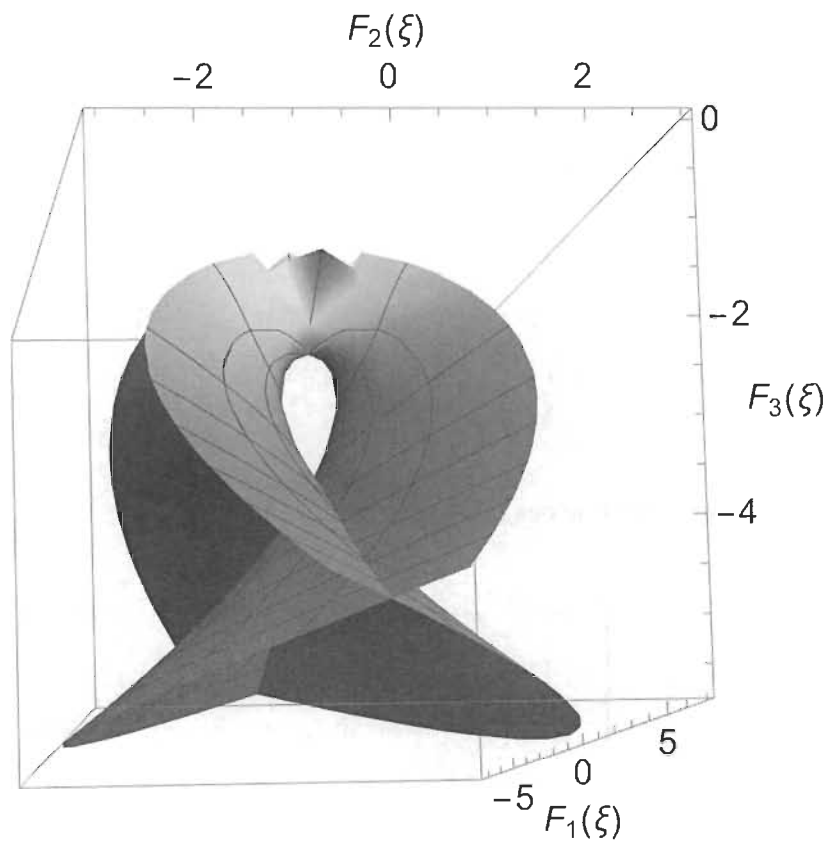


Figure 5.5 Représentation de l'équation de Chebyshev dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.5 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 1$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [-10, 10]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

5.1.5 Équation de Chebyshev de seconde espèce

L'équation de Chebyshev de seconde espèce [10] en ω s'écrit

$$\Delta: \quad (1 - z^2)\partial^2\omega - z\partial\omega + n(n+2)\omega = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \neq \pm 1. \quad (5.93)$$

Comparant les coefficients de (5.93) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{z}{1-z^2} &= -2\frac{\partial\eta}{\eta}, & \frac{n(n+2)}{1-z^2} &= -\lambda\eta^2\partial\chi, \\ \eta^2(z) &= \frac{c_1}{\sqrt{1-z^2}}, & \chi(z) &= -\frac{n(n+2)\arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1}, \end{aligned} \quad (5.94)$$

où $z \neq \pm 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$. La matrice de potentiel (4.61) devient donc

$$\mathcal{U}(n, \lambda; z) = \frac{\lambda c_1}{\sqrt{1-z^2}} \begin{pmatrix} -\frac{n(n+2)\arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1} & -1 \\ \frac{(n(n+2)\arcsin(z)+c_2)^2}{\lambda^2 c_1^2} & \frac{n(n+2)\arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1} \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{n(n+2)\arcsin(z)+c_2}{\sqrt{1-z^2}} & -\frac{\lambda c_1}{\sqrt{1-z^2}} \\ \frac{(n(n+2)\arcsin(z)+c_2)^2}{\lambda c_1 \sqrt{1-z^2}} & \frac{n(n+2)\arcsin(z)+c_2}{\sqrt{1-z^2}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad (5.96)$$

où c_1 et λ sont non-nuls, $z \neq \pm 1$ et $\text{Tr}(\mathcal{U}(z, n, \lambda)) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.94) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Chebyshev de seconde espèce (5.93) en Ψ_1

$$\begin{aligned} \partial^2 \Psi_1 - \left(2\frac{\partial\eta}{\eta}\right) \partial \Psi_1 - (\lambda\eta^2\partial\chi)\Psi_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-z^2)\partial^2 \Psi_1 - z\partial \Psi_1 + n(n+2)\Psi_1 &= 0, \quad z \neq \pm 1, \end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi_1(z) = k_1 \cosh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1}+z)) + ik_2 \sinh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1}+z)), \quad (5.97)$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \chi\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_1}{\lambda\eta^2} \\ &= \frac{1}{\lambda c_1} \left[(-n(n+2)\arcsin(z)+c_2)\Psi_1 + k_1\sqrt{n}\sqrt{n+2} \sinh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1}+z)) \right. \\ &\quad \left. + k_2\sqrt{n}\sqrt{n+2} \cosh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1}+z)) \right]. \end{aligned} \quad (5.98)$$

La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(n, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 \cosh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1} + z)) + ik_2 \sinh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1} + z)) \\ \frac{1}{\lambda c_1} \left[(k_1(c_2 - n(n+2) \arcsin(z)) + k_2 \sqrt{n}\sqrt{n+2}) \cosh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1} + z)) \right. \\ \left. + (ik_2(c_2 - n(n+2) \arcsin(z)) + k_1 \sqrt{n}\sqrt{n+2}) \sinh(\sqrt{n}\sqrt{n+2} \log(\sqrt{z^2-1} + z)) \right] \end{pmatrix}, \quad (5.99)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration arbitraires, $z \neq \pm 1$ et λ est le paramètre spectral du **PL**. Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$\begin{aligned} I_1 &= c_1 \cdot \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\ I_2 &= \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \arcsin(z) + -n(n+2)c_2 \arcsin^2(z) - \frac{n^2(n+2)^2}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\ I_3 &= -\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n(n+2)}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \Re e \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[(\lambda^2 c_1^2 - c_2^2) \arcsin(z) + n(n+2)c_2 \arcsin^2(z) - \frac{n^2(n+2)^2}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ F_2 &= -\frac{1}{2} \Im m \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[(\lambda^2 c_1^2 + c_2^2) \arcsin(z) - n(n+2)c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^2(n+2)^2}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ F_3 &= -\Re e \left(\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n(n+2)}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \end{aligned} \quad (5.101)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{11} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n(n+2)}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{\lambda} \overline{\left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n(n+2)}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\
 \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(c_1 \cdot \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \arcsin(z) - n(n+2)c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^2(n+2)^2}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
 \tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \arcsin(z) - n(n+2)c_2 \arcsin^2(z) + \frac{n^2(n+2)^2}{3} \arcsin^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} - c_1 \cdot \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
 \tilde{F}_{22} &= -\frac{i}{2} \left(+\frac{1}{\lambda} \left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n(n+2)}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{\lambda} \overline{\left[c_2 \arcsin(z) + \frac{n(n+2)}{2} \arcsin^2(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

Remarque. En comparant les résultats associés à l'équation de Chebyshev de première espèce obtenus à la section 5.1.4, nous remarquons que pour obtenir les résultats associés à l'équation de Chebyshev de seconde espèce, il suffit d'appliquer la transformation $n \mapsto \sqrt{n}\sqrt{n+2}$.

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes de la fonction $\arcsin(z)$. La famille de surfaces possède donc des points de branchement en $\{\pm 1, \infty\}$.

Cas particulier.

Posons $n = 1$. Alors l'équation de Chebyshev de seconde espèce devient $(1 - z^2)\partial^2 \omega - z\partial \omega + 3\omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{c_1}{\sqrt{1-z^2}}$ et $\chi = -\frac{3\arcsin(z)+c_2}{\lambda c_1}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et $\lambda = -3$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \chi = \arcsin(z), \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \tag{5.103}$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(1, -3; z) = -\frac{3}{\sqrt{1-z^2}} \begin{pmatrix} \arcsin(z) & -1 \\ \arcsin^2(z) & -\arcsin(z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.104)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(1, -3; z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) + i \sinh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) \\ \cosh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) \left(\arcsin(z) + \frac{i\sqrt{3}\sqrt{1-z^2}}{3\sqrt{z^2-1}}\right) \\ + \sinh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) \left(i \arcsin(z) + \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-z^2}}{3\sqrt{z^2-1}}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F(1, -3; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(\arcsin(z) - \frac{1}{3} \arcsin^3(z) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\left(\arcsin(z) + \frac{1}{3} \arcsin^3(z) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.106)$$

et la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrit

$$\tilde{F}(1, -3; z) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & \arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{3} \arcsin^3(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \\ -\frac{1}{3} \arcsin^3(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\arcsin(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & -\frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{2} \arcsin^2(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad (5.107)$$

$$\operatorname{Tr}(\tilde{F}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}. \quad (5.108)$$

Remarque. Aucune image numérique n'est présentée, car la surface obtenue par simplification des constantes et des paramètres est identique à la figure 5.5 présentée dans l'analyse de cas de l'équation de Chebyshev de seconde espèce.

5.1.6 Équation de Laguerre

L'équation de Laguerre [3] en ω s'écrit

$$\Delta : \quad z\partial^2\omega + (1-z)\partial\omega + \alpha\omega = 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \quad z \neq 0. \quad (5.109)$$

Comparant les coefficients de (5.109) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1-z}{z} &= -2\frac{\partial\eta}{\eta}, & \frac{\alpha}{z} &= -\lambda\eta^2\partial\chi, \\ \eta_{\Delta}^2(z) &= \frac{e^z}{c_1z}, & \chi_{\Delta}(z) &= \frac{\alpha c_1 e^{-z} + c_2}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.110)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$. La matrice de potentiel (4.61) devient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha, \lambda; z) &= \frac{\lambda e^z}{c_1 z} \begin{pmatrix} \frac{\alpha c_1 e^{-z} + c_2}{\lambda} & -1 \\ \frac{(\alpha c_1 e^{-z} + c_2)^2}{\lambda^2} & -\frac{\alpha c_1 e^{-z} + c_2}{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \frac{c_2}{c_1} e^z}{z} & -\frac{\lambda e^z}{c_1 z} \\ \frac{(\alpha c_1 e^{-z} + c_2)^2 e^z}{\lambda c_1 z} & -\frac{\alpha + \frac{c_2}{c_1} e^z}{z} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (5.111)$$

car $Tr(\mathcal{U}(z, \alpha, \lambda)) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.110) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Laguerre (5.109) en Ψ_1

$$\begin{aligned} \partial^2\Psi_1 - \left(2\frac{\partial\eta}{\eta}\right)\partial\Psi_1 - (\lambda\eta^2\partial\chi)\Psi_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial^2\Psi_1 + \frac{1-z}{z}\partial\Psi_1 + \frac{\alpha}{z}\Psi_1 &= 0, \end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi_1(z) = k_1 L_{\alpha}(z) + k_2 U(-\alpha, 1, z), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.112)$$

où $L_\alpha(z)$ et $U(-\alpha, 1, z)$ sont respectivement le polynôme de Laguerre d'ordre α et la fonction hypergéométrique de deuxième espèce. Le polynôme de Laguerre prend la forme [3]

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} z^k, \quad (5.113)$$

que l'on peut exprimer par la formule de Rodrigues [3]

$$L_n(z) = \frac{e^z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}). \quad (5.114)$$

Il existe également une forme intégrale du polynôme de Laguerre [2], où l'intégration se fait sur un contour fermé C incluant $z_0 = 0$, mais pas $z_1 = 1$

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z} t^{\frac{1}{1-t}}}{(1-t)t^{n+1}} dt. \quad (5.115)$$

La fonction hypergéométrique de deuxième espèce prend la forme [26]

$$\begin{aligned} U(v_1, v_2, z) &= \pi \cos(\pi v_2) \left(\frac{{}_1\tilde{F}_1(v_1, v_2, z)}{\Gamma(v_1 - v_2 + 1)} - \frac{z^{1-v_2} {}_1\tilde{F}_1(v_1 - v_2 + 1, 2 - v_2, z)}{\Gamma(v_1)} \right) \\ &= z^{-v_1} {}_2F_0(1, 1 + v_1 - v_2, -z^{-1}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(v_1)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{v_1-1} (1+t)^{v_2-v_1-1} dt, \end{aligned} \quad (5.116)$$

où ${}_1\tilde{F}_1$ est la fonction hypergéométrique confluyente régularisée et ${}_2F_0$ est la fonction hypergéométrique confluyente généralisée. Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\ &= \frac{\alpha c_1 e^{-z} + c_2}{\lambda} [k_1 L_\alpha(z) + k_2 U(-\alpha, 1, z)] - \frac{\partial (k_1 L_\alpha(z) + k_2 U(-\alpha, 1, z)) c_1 z e^{-z}}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda} \left[(\alpha c_1 e^{-z} + c_2) [k_1 L_\alpha(z) + k_2 U(-\alpha, 1, z)] \right. \\
&\quad \left. - c_1 z e^{-z} \left(k_1 \alpha \frac{L_\alpha(z) - L_{\alpha-1}(z)}{z} + k_2 \alpha U(1 - \alpha, 2, z) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[k_1 \left(c_2 L_\alpha(z) + \frac{c_1 \alpha}{e^z} L_{\alpha-1}(z) \right) \right. \\
&\quad \left. + k_2 \left(\left(\frac{c_1 \alpha}{e^z} + c_2 \right) U(-\alpha, 1, z) - \frac{c_1 \alpha z}{e^z} U(1 - \alpha, 2, z) \right) \right], \quad (5.117)
\end{aligned}$$

car $z \partial L_m(z) = m L_m(z) - m L_{m-1}(z)$ [28] et $\partial U(v_1, v_2, z) = -v_1 U(v_1 + 1, v_2 + 1, z)$ [1]. La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(\alpha, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 L_\alpha(z) + k_2 U(-\alpha, 1, z) \\ \frac{1}{\lambda} \left[k_1 \left(c_2 L_\alpha(z) + \frac{c_1 \alpha}{e^z} L_{\alpha-1}(z) \right) \right. \\ \left. + k_2 \left(\left(\frac{c_1 \alpha}{e^z} + c_2 \right) U(-\alpha, 1, z) - \frac{c_1 \alpha z}{e^z} U(1 - \alpha, 2, z) \right) \right] \end{pmatrix}, \quad (5.118)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration arbitraires, $z \neq 0$ et λ est le paramètre spectral du **PL**. Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{c_1} Ei(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\
I_2 &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\alpha^2 c_1 Ei(-z) + \frac{c_2^2}{c_1} Ei(z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\
I_3 &= \frac{1}{\lambda} \left(\alpha \log(z) + \frac{c_2}{c_1} Ei(z) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \quad (5.119)
\end{aligned}$$

où $Ei(z)$ est l'exponentielle intégrale [39] définie par

$$\begin{aligned}
Ei(z) &= \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt + \frac{1}{2} \left(\log(z) - \log\left(\frac{1}{z}\right) \right) + \gamma \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!} + \frac{1}{2} \left(\log(z) - \log\left(\frac{1}{z}\right) \right) + \gamma,
\end{aligned}$$

γ étant la constante d'Euler-Mascheroni. Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{c_1} (\lambda^2 - c_2^2) Ei(z) - \alpha^2 c_1 Ei(-z) - 2\alpha c_2 \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{c_1} (\lambda^2 + c_2^2) Ei(z) + \alpha^2 c_1 Ei(-z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ F_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda} \left[\alpha \log(z) + \frac{c_2}{c_1} Ei(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[\frac{c_2}{c_1} Ei(z) + \alpha \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{\lambda} \left[\frac{c_2}{c_1} Ei(z) + \alpha \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{c_1} Ei(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{c_2^2}{c_1} Ei(z) + \alpha^2 c_1 Ei(-z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{c_2^2}{c_1} Ei(z) + \alpha^2 c_1 Ei(-z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{c_1} Ei(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right), \\ \tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[\frac{c_2}{c_1} Ei(z) + \alpha \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{\lambda} \left[\frac{c_2}{c_1} Ei(z) + \alpha \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (5.121)$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes des fonctions $Ei(z)$ et $\log(z)$. La famille de surfaces possède donc des points de branchement en $\{0, \infty\}$.

Cas particulier.

Posons $\alpha = 1$. Alors l'équation de Laguerre devient $z\partial^2\omega + (1-z)\partial\omega + \omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{e^z}{c_1 z}$ et $\chi = \frac{c_1 e^{-z} + c_2}{\lambda}$. Posons pour les constantes d'intégration et le

paramètre spectral $c_1 = 1, c_2 = 0, k_1 = 1, k_2 = 1$ et $\lambda = 1$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{e^z}{z}, \quad \chi = e^{-z}, \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.122)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(1, 1; z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -1 & e^z \\ -e^{-z} & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.123)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(1, 1; z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z-1)(Ei(z)+1) - e^z \\ -e^{-z}(Ei(z)+1) \end{pmatrix}, \quad (5.124)$$

où la composante Ψ_2 a été obtenu en utilisant le fait que

$$\partial Ei(z) = \frac{e^z}{z}. \quad (5.125)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F(1, 1; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Re e \left[(Ei(z) - Ei(-z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ -\frac{1}{2} \Im m \left[(Ei(z) + Ei(-z)) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \\ \Re e \left[\log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.126)$$

et la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrit

$$\tilde{F}(1, 1; z) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & Ei(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{Ei(-z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \\ -Ei(-z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{Ei(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} & -\log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad (5.127)$$

$$Tr(\tilde{F}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}. \quad (5.128)$$

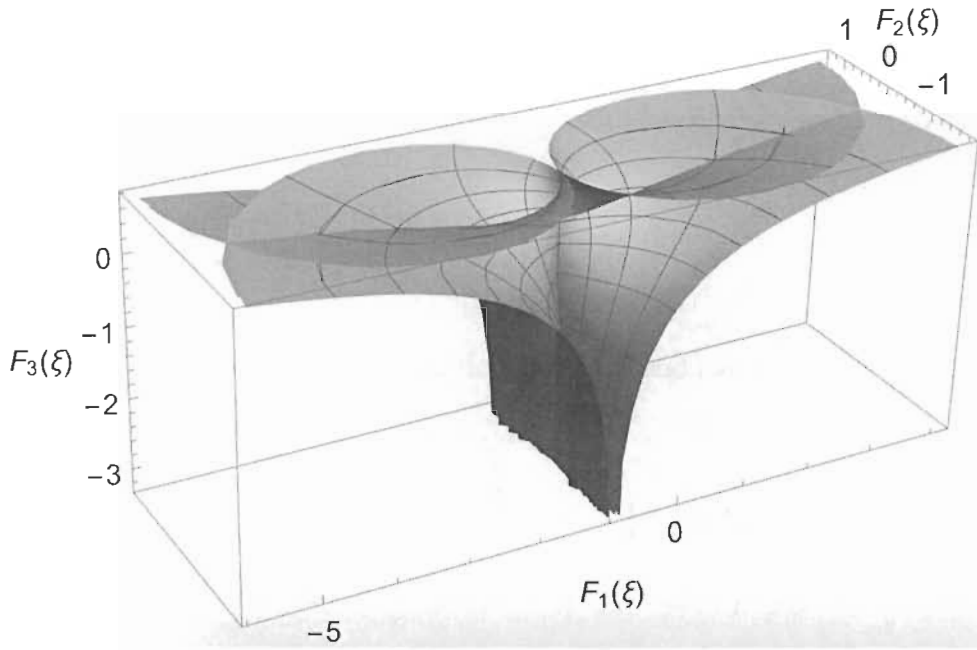


Figure 5.6 Représentation de l'équation de Laguerre dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.6 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 1 + i$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [-3, 3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

5.1.7 Équation de Laguerre associée

L'équation de Laguerre associée en ω s'écrit

$$\Delta: \quad z\partial^2\omega + (\alpha + 1 - z)\partial\omega + n\omega = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 1, \quad z \neq 0. \quad (5.129)$$

Nous posons l'hypothèse que le paramètre α est un entier positif (cas particulier). Comparant les coefficients de (5.129) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en

intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1-z}{z} &= -2 \frac{\partial \eta}{\eta}, & \frac{n}{z} &= -\lambda \eta^2 \partial \chi, \\ \Leftrightarrow \eta^2(z) &= \frac{e^z}{c_1 z^{\alpha+1}}, & \chi(z) &= \frac{nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.130)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0$, $z \neq 0$ et où $\Gamma(v, z)$ est la fonction gamma incomplète [26] définie par

$$\Gamma(v, z) := \int_z^\infty t^{v-1} e^{-t} dt. \quad (5.131)$$

Notons que si $v = N \in \mathbb{N}$, alors [43]

$$\Gamma(N, z) = (N-1)! e^{-z} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{z^r}{r!} \quad (5.132)$$

$$\Rightarrow \chi(z) = \frac{nc_1 \alpha! e^{-z} \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{z^r}{r!} + c_2}{\lambda}. \quad (5.133)$$

La matrice de potentiel (4.61) devient donc

$$\mathcal{U}(\alpha, n, \lambda; z) = \frac{\lambda e^z}{c_1 z^{\alpha+1}} \begin{pmatrix} \frac{nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2}{\lambda} & -1 \\ \frac{(nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2)^2}{\lambda^2} & -\frac{nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2}{c_1 z^{\alpha+1} e^{-z}} & -\frac{\lambda e^z}{c_1 z^{\alpha+1}} \\ \frac{(nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2)^2}{\lambda c_1 z^{\alpha+1} e^{-z}} & -\frac{nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2}{c_1 z^{\alpha+1} e^{-z}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad (5.135)$$

où c_1 et z sont non-nuls et $Tr(\mathcal{U}) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.130) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Laguerre associée (5.129) en Ψ_1

$$\begin{aligned}
& \partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\
\Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 - 2 \left(\frac{\frac{e^{\frac{z}{2}}}{2c_1^{\frac{1}{2}} z^{\frac{\alpha+1}{2}}} \left(1 - \frac{\alpha+1}{z} \right)}{\frac{e^{\frac{z}{2}}}{c_1^{\frac{1}{2}} z^{\frac{\alpha+1}{2}}}} \right) \partial \Psi_1 - \left(\lambda \frac{e^z}{c_1 z^{\alpha+1}} \frac{-nc_1 z^\alpha}{\lambda e^z} \right) \Psi_1 = 0 \\
\Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 + \frac{\alpha+1-z}{z} \partial \Psi_1 + \frac{n}{z} \Psi_1 = 0
\end{aligned}$$

dont la solution est donnée par

$$\Psi_1(z) = k_1 L_n^\alpha(z) + k_2 U(-n, \alpha+1, z), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.136)$$

où $L_n^\alpha(z)$ et $U(-n, \alpha+1, z)$ sont respectivement le polynôme de Laguerre associé d'ordre n et de degré α et la fonction hypergéométrique de deuxième espèce. Le polynôme de Laguerre associé est défini par la formule de Rodrigues [3]

$$L_n^\alpha(z) = \frac{e^z z^{-\alpha}}{n!} \partial^n (e^{-z} z^{n+\alpha}) \quad (5.137)$$

$$= \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(n+\alpha)!}{(n-r)!(\alpha+r)!r!} z^r. \quad (5.138)$$

Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\
&= \frac{nc_1 \Gamma(\alpha+1, z) + c_2}{\lambda} [k_1 L_n^\alpha(z) + k_2 U(-n, \alpha+1, z)] \\
&\quad - \frac{c_1 z^{\alpha+1} e^{-z}}{\lambda} [k_1 z^{-1} (n L_n^\alpha(z) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(z)) + k_2 n U(-n+1, \alpha+2, z)]
\end{aligned} \quad (5.139)$$

car $\partial L_n^\alpha(z) = z^{-1} (n L_n^\alpha(z) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(z))$ [28] et $\partial U(v_1, v_2, z)(z) = -v_1 U(v_1+1, v_2+1, z)$ [1]. La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et

satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(\alpha, n, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 L_n^\alpha(z) + k_2 U(-n, \alpha + 1, z) \\ \frac{1}{\lambda} [k_1 ((nc_1 \Gamma(\alpha + 1; z) + c_2) - nc_1 z^\alpha e^{-z}) L_n^\alpha(z) + (n + \alpha) c_1 z^{\alpha+1} e^{-z} L_{n-1}^\alpha(z)) \\ + k_2 ((nc_1 \Gamma(\alpha + 1; z) + c_2) U(-n, \alpha + 1, z) - nc_1 z^{\alpha+1} e^{-z} U(-n + 1, \alpha + 2, z))] \end{pmatrix}, \quad (5.140)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration arbitraires, $z \neq 0$ et λ est le paramètre spectral du **PL**. La première intégrale de (5.1) s'écrit

$$I_1 = -\frac{1}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \quad (5.141)$$

où $E_m(z)$ est définie par

$$E_m(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^m} dt. \quad (5.142)$$

La deuxième intégrale de (5.1) s'écrit

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[\overbrace{n^2 c_1 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^z \Gamma^2(\alpha + 1, z)}{z^{\alpha+1}} dz}^{(i)} + \overbrace{\frac{c_2^2}{c_1} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^z}{z^{\alpha+1}} dz}^{(ii)} + \overbrace{2nc_2 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^z \Gamma(\alpha + 1, z)}{z^{\alpha+1}} dz}^{(iii)} \right]_{\xi_0}^{\xi}, \quad (5.143)$$

L'intégrale (ii) est connue, car

$$(ii) = c_1 \cdot I_1 = -z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.144)$$

Supposons que $N \in \mathbb{N}$. Alors par (5.132), nous pouvons écrire $\Gamma(N, z) = (N-1)! e^{-z} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{z^r}{r!}$

et ainsi, puisque α est un entier, alors

$$\begin{aligned}
 (i) &= \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^z \left(\alpha! e^{-z} \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{z^r}{r!} \right)^2}{z^{\alpha+1}} dz \\
 &= (\alpha!)^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^{-z} \left(\sum_{r=0}^{\alpha} \frac{z^r}{r!} \right)^2}{z^{\alpha+1}} dz \\
 &= (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{1}{p!q!} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-z} z^{p+q-(\alpha+1)} dz \\
 &= -(\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}.
 \end{aligned}$$

De la même manière, nous trouvons que

$$(iii) = \left[\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.145)$$

En résumé, les intégrales (5.1) sont

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{1}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}, \\
 I_2 &= \frac{1}{\lambda^2} \left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} - \frac{c_2^2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\
 I_3 &= \frac{1}{\lambda} \left[n \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right]_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.146)
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{c_1} (c_2^2 - \lambda^2) z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) - 2nc_2 \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}, \\
 F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{c_1} (\lambda^2 + c_2^2) z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}, \\
 F_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda} \left[n \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.147)
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[n \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{\lambda} \left[n \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\
 \tilde{F}_{12} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right)_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{\lambda^2} \left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} - \frac{c_2^2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\
 \tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^{\alpha} \sum_{q=0}^{\alpha} \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} - \frac{c_2^2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}, \\
 \tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[n \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{\lambda} \left[n \left(\alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z) \right) - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right]_{\xi_0}^{\xi}.
 \end{aligned}$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent en termes des fonctions $E_{\alpha+1}(-z) = z^{\alpha} \Gamma(-\alpha, z)$ et $\log(z)$. La famille de surfaces possède donc un point de branchement en $\{\infty\}$ et une singularité essentielle en $\{\infty\}$.

Cas particulier.

Posons $\alpha = 2$ et $n = 1$. Alors l'équation de Laguerre devient $z\partial^2\omega + (3-z)\partial\omega + \omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{e^z}{c_1 z^3}$ et $\chi = \frac{c_1 \Gamma(3,z) + c_2}{\lambda}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et $\lambda = 1$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{e^z}{z^3}, \quad \chi = \Gamma(3,z), \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.148)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(2,1,1;z) = \frac{e^z}{z^3} \begin{pmatrix} \Gamma(3,z) & -1 \\ \Gamma^2(3,z) & -\Gamma(3,z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.149)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(2,1,1;z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z-3)Ei(z) + e^z \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - 1 \right) + z - 3 \\ \Gamma(3,z) \left((z-3)Ei(z) + e^z \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - 1 \right) + z - 3 \right) \\ - \frac{z^3}{e^z} (Ei(z) + 1) + z(z+1) + 2 \end{pmatrix}. \quad (5.150)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F(2,1,1;z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_1 - I_2) \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(I_1 + I_2) \\ \operatorname{Re}[I_3] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.151)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[Ei(z) - \frac{e^z(z+1)}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi}, \quad I_2 = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^z}{z^3} \Gamma^2(3,z) dz, \quad I_3 = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^z}{z^3} \Gamma(3,z) dz. \quad (5.152)$$

Pour calculer les intégrales I_2 et I_3 de (5.152), nous utilisons le fait que pour une fonction $\Gamma(v, z)$ incomplète quelconque,

$$v = N \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(N, z) = (N-1)! e^{-z} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{z^r}{r!}. \quad (5.153)$$

Dans le cas présent,

$$3 \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(3, z) = 2! e^{-z} \sum_{r=0}^2 \frac{z^r}{r!} = 2e^{-z} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} \right) \quad (5.154)$$

et ainsi

$$I_2 = \left[2Ei(z) - e^{-z} \left(z + 5 + \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \quad I_3 = \left[\log(z) - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.155)$$

La formule d'immersion s'écrit donc

$$F(2, 1, 1; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left[-\frac{3}{2} Ei(z) - \frac{1}{2} e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + e^{-z} \left(z + 5 + \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right) \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\left[\frac{5}{2} Ei(z) - \frac{1}{2} e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) - e^{-z} \left(z + 5 + \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right) \\ \operatorname{Re} \left(\left[\log(z) - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (5.156)$$

Les composantes de la représentation paramétrique de la surface dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(\left[\log(z) - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\left[\log(z) - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{2} \left[Ei(z) - \frac{e^z(z+1)}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\left[2Ei(z) - e^{-z} \left(z + 5 + \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\left[2Ei(z) - e^{-z} \left(z + 5 + \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{2} \overline{\left[Ei(z) - \frac{e^z(z+1)}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\ \tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(\left[\log(z) - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\left[\log(z) - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (5.157)$$

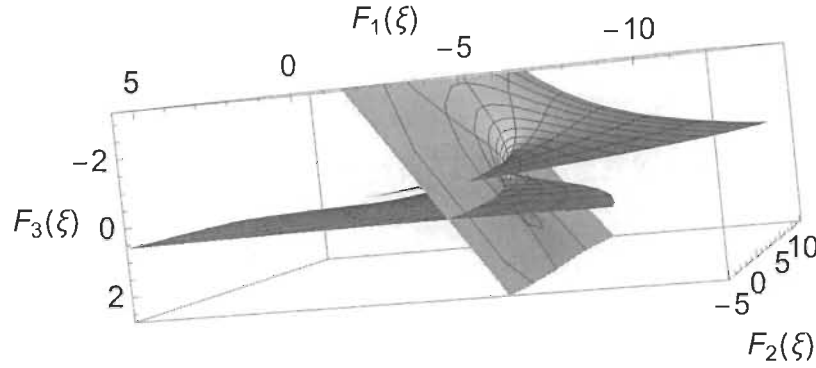


Figure 5.7 Représentation de l'équation de Laguerre associée dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.7 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 3 + 3i$ à $\xi = x + iy$, $x \in [-3, 3]$, $y \in [\frac{1}{64}, 3]$.

5.1.8 Équation d'Hermite

L'équation d'Hermite [10; 26] en ω (aussi nommée équation de la fonction d'erreur) s'écrit

$$\Delta: \quad \partial^2 \omega - 2z \partial \omega - 2n\omega = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.158)$$

Comparant les coefficients de (5.158) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial \eta}{\eta} &= -2z, & -\lambda \eta^2 \partial \chi &= -2n, \\ \Rightarrow \quad \eta_{\Delta}(z) &= c_1 e^{\frac{z^2}{2}}, & \chi_{\Delta}(z) &= \frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds, \end{aligned} \quad (5.159)$$

où $c_1 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\chi_{\Delta}(z) = \frac{\sqrt{\pi n}}{\lambda c_1^2} (erf(z) - erf(z_0))$, où erf est la fonction d'erreur [1] définie par

$$erf(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds. \quad (5.160)$$

La matrice de potentiel (4.61) devient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(p, \lambda; z) &= \lambda c_1^2 e^{z^2} \begin{pmatrix} \frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds & -1 \\ \frac{4n^2}{\lambda^2 c_1^4} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 & -\frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \end{pmatrix} \\ &= e^{z^2} \begin{pmatrix} 2n \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds & -\lambda c_1^2 \\ \frac{4n^2}{\lambda c_1^2} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 & -2n \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5.161)$$

En effectuant la substitution de η et χ (5.159) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation d'Hermite (5.158) en Ψ_1

$$\begin{aligned} &\partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \chi) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{\partial \left(c_1 e^{\frac{z^2}{2}} \right)}{c_1 e^{\frac{z^2}{2}}} \partial \Psi_1 - \lambda c_1^2 e^{z^2} \left(\frac{2n}{\lambda c_1^2} e^{-z^2} \right) \Psi_1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial^2 \Psi_1 - 2z \partial \Psi_1 - 2n \Psi_1 = 0. \end{aligned}$$

La solution de cette équation s'exprime en fonction du polynôme d'Hermite H_{-n} et de la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer ${}_1F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right)$

$$\Psi_1(z, n) = k_1 H_{-n}(z) + k_2 {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; z^2\right), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad (5.162)$$

où par la définition 22.3.10 de [1] et la définition 9.1 de [3],

$$H_n(z) := n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2z)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}, \quad {}_1F_1(v_1; v_2; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(v_1)_k}{(v_2)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (5.163)$$

Dans ce contexte, $(x)_n$ est le symbole de Pochhammer [1] défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x)_n := x(x+1)(x+2) \cdots (x+(n-1)). \quad (5.164)$$

Le polynôme d'Hermite s'écrit en termes de la formule de Rodrigues [1]

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \partial^n e^{-z^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.165)$$

Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\ &= \frac{2n}{\lambda c_1} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot \Psi_1(z, n) - \partial \Psi_1(z, n) \frac{1}{\lambda c_1^2 e^{z^2}} \\ &= -\frac{1}{\lambda c_1} \left(\frac{e^{-z^2}}{c_1} \partial \Psi_1(z) - 2n \Psi_1(z, n) \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right). \end{aligned} \quad (5.166)$$

La fonction d'onde (4.59) s'écrit donc

$$\Psi(n, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 H_{-n}(z) + k_2 {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \\ \frac{2n}{\lambda c_1} \left(k_1 \left(\frac{e^{-z^2}}{c_1} H_{-n-1}(z) - H_{-n}(z) \right) \right. \\ \left. - k_2 \left({}_1F_1\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right) + {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right) \right) \end{pmatrix}. \quad (5.167)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \left(1 - \left(\frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 \right) e^{z^2} dz \right), \\ F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \left(1 + \left(\frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 \right) e^{z^2} dz \right), \\ F_3 &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{n}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz \right). \end{aligned} \quad (5.168)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{2n}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz + \overline{\frac{2n}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz} \right), \\ \tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} e^{z^2} dz - \frac{4n^2}{\lambda^2 c_1^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 e^{z^2} dz \right), \\ \tilde{F}_{21} &= -\frac{i}{2} \left(-\frac{4n^2}{\lambda^2 c_1^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 e^{z^2} dz + c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} e^{z^2} dz \right), \\ \tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(\frac{2n}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz + \overline{\frac{2n}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz} \right).\end{aligned}\quad (5.169)$$

Les composantes $(\tilde{F}_{11}, \tilde{F}_{12}, \tilde{F}_{21}, \tilde{F}_{22})$ et (F_1, F_2, F_3) s'écrivent notamment en termes de la fonction $\operatorname{erfi}(z)$. La famille de surfaces possède donc une singularité essentielle en $\{\infty\}$.

Cas particulier.

Posons $n = 1$. Alors l'équation d'Hermite devient $\partial^2 \omega - 2z \partial \omega - 2\omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = c_1^2 e^{z^2}$ et $\chi = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(z) + c_2}{\lambda c_1^2}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $k_2 = 1$ et $\lambda = \sqrt{\pi}$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = e^{z^2}, \quad \chi = \operatorname{erf}(z), \quad \bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0. \quad (5.170)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(1, \sqrt{\pi}; z) = \sqrt{\pi} e^{z^2} \begin{pmatrix} \operatorname{erf}(z) & -1 \\ \operatorname{erf}^2(z) & -\operatorname{erf}(z) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.171)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(1, \sqrt{\pi}; z) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{z^2} (\operatorname{erf}(z) + 1) \\ (\operatorname{erf}(z) + 1) \left(e^{z^2} \operatorname{erf}(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \right) - \frac{2}{\pi} e^{-z^2} \end{pmatrix}. \quad (5.172)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F(1, \sqrt{\pi}; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 - \operatorname{erf}^2(z)) e^{z^2} dz \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 + \operatorname{erf}^2(z)) e^{z^2} dz \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(z^2 {}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; z^2\right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.173)$$

et la représentation paramétrique de la surface dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrit

$$\tilde{F}(1, \sqrt{\pi}; z) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad \operatorname{Tr}(\tilde{F}) = 0, \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F}, \quad (5.174)$$

où

$$\tilde{F}_{11} = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \left(z^2 {}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; z^2\right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{z^2 {}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; z^2\right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right),$$

$$\tilde{F}_{12} = -\frac{i}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \int_{\xi_0}^{\xi} \operatorname{erf}^2(z) e^{z^2} dz \right),$$

$$\tilde{F}_{21} = \frac{i}{2} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \operatorname{erf}^2(z) e^{z^2} dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \overline{\operatorname{erfi}(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right),$$

$$\tilde{F}_{22} = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \left(z^2 {}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; z^2\right) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{z^2 {}_2F_2\left(1, 1; \frac{3}{2}, 2; z^2\right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right). \quad (5.175)$$

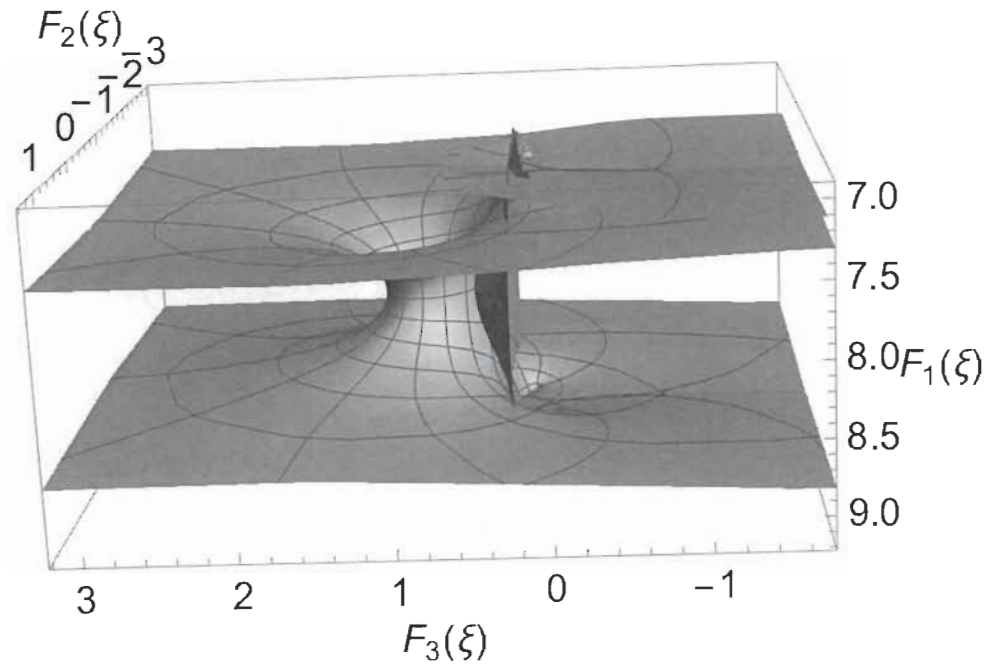


Figure 5.8 Représentation de l'équation d'Hermite dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.8 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 1 + 3i$ à $\xi = x + iy$, $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$.

5.1.9 Équation de Gegenbauer

L'équation de Gegenbauer [3] en ω s'écrit

$$\Delta: \quad (1 - z^2)\partial^2\omega - (2\alpha + 1)\partial\omega + n(n + 2\alpha)\omega = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}, z \neq \pm 1. \quad (5.176)$$

Nous vérifions que la formulation de l'équation Δ sous la forme du problème de Sturm-Liouville suivante est équivalente

$$\partial\omega \left(\underbrace{(1 - z)^{1/2+\alpha}(1 + z)^{-1/2-\alpha}}_{\rho(z)} \partial\omega \right) + \underbrace{n(2\alpha + n)}_{\lambda} \underbrace{\frac{(1 - z)^{1/2+\alpha}(1 + z)^{-1/2-\alpha}}{1 - z^2}}_{\rho(z)} \omega = 0 \quad (5.177)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & -(1/2 + \alpha)(1-z)^{\alpha-1/2}(1+z)^{-1/2-\alpha} \partial \omega \\ & + (1-z)^{1/2+\alpha} \left[(-1/2 - \alpha)(1+z)^{-\alpha-3/2} \partial \omega + (1+z)^{-1/2-\alpha} \partial^2 \omega \right] \\ & + \frac{n(2\alpha + n)(1-z)^{1/2+\alpha}(1+z)^{-1/2-\alpha} \omega}{(1-z)(1+z)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (1-z)^{\alpha+3/2}(1+z)^{-\alpha+1/2} \partial^2 \omega \\ & + \left[(-1/2 - \alpha)(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha+1/2} + (-1/2 - \alpha)(1-z)^{\alpha+3/2}(1+z)^{-\alpha-1/2} \right] \partial \omega \\ & + n(2\alpha + n)(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha-1/2} \omega = 0 \end{aligned}$$

et en multipliant par $(1-z)^{-\alpha-1/2}(1+z)^{\alpha+1/2}$, nous trouvons que

$$(1-z)(1+z) \partial^2 \omega + [(-1/2 - \alpha)(1+z) + (-1/2 - \alpha)(1-z)] \partial \omega + n(2\alpha + n) \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-z^2) \partial^2 \omega - (2\alpha + 1) \partial \omega + n(n + 2\alpha) \omega = 0.$$

En comparant les coefficients de (5.176) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{2\alpha + 1}{1-z^2} &= -2 \frac{\partial \eta}{\eta}, & \frac{n(n + 2\alpha)}{1-z^2} &= -\lambda \eta^2 \partial \chi, \\ \Rightarrow \eta^2(z) &= c_1 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha+1/2}, & \chi(z) &= \frac{n(n + 2\alpha)(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha-1/2} + c_2}{\lambda c_1 (2\alpha + 1)}, \end{aligned} \tag{5.178}$$

où, $z \neq \pm 1, 0 \neq c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1/2$, $\bar{\partial} \eta = \bar{\partial} \chi = 0$. La matrice de potentiel (4.61) a donc comme composantes

$$\begin{aligned}
u_{11} &= \frac{n(n+2\alpha) + c_2(1+z)^{\alpha+1/2}(1-z)^{-\alpha-1/2}}{(2\alpha+1)}, \\
u_{12} &= -\lambda c_1(1+z)^{\alpha+1/2}(1-z)^{-\alpha-1/2}, \\
u_{21} &= \frac{n^2(n+2\alpha)^2(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha-1/2} + 2c_2n(n+2\alpha) + c_2^2(1+z)^{\alpha+1/2}(1-z)^{-\alpha-1/2}}{c_1\lambda(2\alpha+1)^2}, \\
u_{22} &= -\frac{n(n+2\alpha) + c_2(1+z)^{\alpha+1/2}(1-z)^{-\alpha-1/2}}{(2\alpha+1)}, \tag{5.179}
\end{aligned}$$

où c_1 et λ sont non-nuls, $z \neq \pm 1$, $\alpha \neq -1$ et $Tr(\mathcal{U}) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.178) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Gegenbauer (5.176) en Ψ_1

$$\begin{aligned}
&\partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta}\right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\
\Leftrightarrow &\partial^2 \Psi_1 - 2 \frac{c_1^{1/2}(1/4)(2\alpha+1) \left(\frac{1-z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}\right) \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{(2\alpha-1)/4}}{c_1^{1/2} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{(2\alpha+1)/4}} \partial \Psi_1 + \frac{n(n+2\alpha)}{1-z^2} \Psi_1 = 0 \\
&\partial^2 \Psi_1 - \frac{2\alpha+1}{1-z^2} \partial \Psi_1 + \frac{n(n+2\alpha)}{1-z^2} \Psi_1 = 0.
\end{aligned}$$

En posant $\kappa = \sqrt{4n^2 + 8\alpha n + 1}$, nous exprimons la solution générale de l'équation de Gegenbauer en termes de la fonction hypergéométrique

$$\begin{aligned}
\Psi_1(z) &= k_1 {}_2F_1 \left(-1/2(\kappa+1), 1/2(\kappa-1); \alpha+1/2; \frac{1-z}{2} \right) \\
&\quad + k_2 2^{\alpha-1/2} (z-1)^{-\alpha+1/2} {}_2F_1 \left(-\alpha-1/2\kappa, 1/2\kappa; 3/2-\alpha; \frac{1-z}{2} \right) \tag{5.180}
\end{aligned}$$

où ${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z)$ est la fonction hypergéométrique de Gauss s'exprimant sous la forme d'une série convergente

$${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(v_1)_r (v_2)_r}{(v_3)_r} \frac{z^r}{r!} \tag{5.181}$$

si $v_3 \notin \mathbb{Z}^- \quad \forall |z| < 1$, et si $\Re(v_3 - v_1 - v_2) > 0$, $v_3 \notin \mathbb{Z}^- \quad \forall |z| = 1$ [26]. Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\ &= \frac{n(n+2\alpha)(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha-1/2} + c_2}{\lambda c_1(2\alpha+1)} \Psi_1 \\ &\quad - \frac{1}{\lambda c_1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{(2\alpha+1)/4} \left[k_1 \frac{(-1/2(\kappa+1))(1/2(\kappa-1))}{\alpha+1/2} {}_2F_1 \left(1-1/2(\kappa+1), 1+1/2(\kappa-1); \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \alpha+3/2; \frac{1-z}{2} \right) + (1/2-\alpha) 2^{\alpha-1/2} k_2 (z-1)^{-1/2-\alpha} {}_2F_1 \left(-\alpha-1/2\kappa, 1/2\kappa; 3/2-\alpha; \frac{1-z}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2^{\alpha-3/2} k_2 (z-1)^{1/2-\alpha} \frac{\kappa(\alpha+1/4\kappa)}{3/2-\alpha} {}_2F_1 \left(1-\alpha-1/2\kappa, 1+1/2\kappa; 5/2-\alpha; \frac{1-z}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.182)$$

La fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(\alpha, n, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 {}_2F_1 \left(-1/2(\kappa+1), 1/2(\kappa-1); \alpha+1/2; \frac{1-z}{2} \right) \\ + k_2 2^{\alpha-1/2} (z-1)^{-\alpha+1/2} {}_2F_1 \left(-\alpha-1/2\kappa, 1/2\kappa; 3/2-\alpha; \frac{1-z}{2} \right) \\ \\ \frac{1}{\lambda c_1} \left[k_1 \left(\frac{n(n+2\alpha)(\frac{1-z}{1+z})^{\alpha+1/2} + c_2}{2\alpha+1} {}_2F_1 \left(-1/2(\kappa+1), 1/2(\kappa-1); \alpha+1/2; \frac{1-z}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{(\kappa+1)(\kappa-1)}{\alpha+1/2} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{(2\alpha+1)/4} {}_2F_1 \left(1-1/2(\kappa+1), 1+1/2(\kappa-1); \alpha+3/2; \frac{1-z}{2} \right) \right) \right. \\ \left. + k_2 2^{\alpha-1/2} (z-1)^{1/2-\alpha} \left(\left(\frac{n(n+2\alpha)(\frac{1-z}{1+z})^{\alpha+1/2} + c_2}{2\alpha+1} + (1/2-\alpha)(z-1)^{-1} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot {}_2F_1 \left(-\alpha-1/2\kappa, 1/2\kappa; 3/2-\alpha; \frac{1-z}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\kappa(\alpha+1/4\kappa)}{3/2-\alpha} {}_2F_1 \left(1-\alpha-1/2\kappa, 1+1/2\kappa; 5/2-\alpha; \frac{1-z}{2} \right) \right) \right] \end{pmatrix}, \quad (5.183)$$

car $\partial {}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z) = \frac{v_1 v_2}{v_3} {}_2F_1(v_1+1, v_2+1; v_3+1; z)$ [41]. Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$I_1 = \frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} {}_2F_1 \left(\alpha+1/2, \alpha+3/2; \alpha+5/2; \frac{z+1}{2} \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi},$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2 c_1 (2\alpha + 1)^2} \left(\frac{n^2 (n + 2\alpha)^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1 - 2\alpha} (1 + z)^{1/2-\alpha} {}_2F_1 \left(-\alpha - 1/2, 1/2 - \alpha; 3/2 - \alpha; \frac{z+1}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha + 3} (z + 1)^{\alpha+3/2} {}_2F_1 \left(\alpha + 1/2, \alpha + 3/2; \alpha + 5/2; \frac{z+1}{2} \right) + 2c_2 n(n + 2\alpha)z \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi},$$

$$I_3 = \frac{1}{\lambda(2\alpha + 1)} \left(n(n + 2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha + 3} (z + 1)^{\alpha+3/2} {}_2F_1 \left(\alpha + 1/2, \alpha + 3/2; \alpha + 5/2; \frac{z+1}{2} \right) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}.$$

Posons

$$F_{11}^* = {}_2F_1 \left(-1/2(\kappa + 1), 1/2(\kappa - 1); \alpha + 1/2; \frac{1-z}{2} \right),$$

$$F_{12}^* = {}_2F_1 \left(-\alpha - 1/2\kappa, 1/2\kappa; 3/2 - \alpha; \frac{1-z}{2} \right),$$

$$F_{13}^* = {}_2F_1 \left(1 - 1/2(\kappa + 1), 1 + 1/2(\kappa - 1); \alpha + 3/2; \frac{1-z}{2} \right),$$

$$F_{14}^* = {}_2F_1 \left(1 - \alpha - 1/2\kappa, 1 + 1/2\kappa; 5/2 - \alpha; \frac{1-z}{2} \right),$$

$$F_{15}^* = {}_2F_1 \left(\alpha + 1/2, \alpha + 3/2; \alpha + 5/2; \frac{z+1}{2} \right),$$

$$F_{16}^* = {}_2F_1 \left(-\alpha - 1/2, 1/2 - \alpha; 3/2 - \alpha; \frac{z+1}{2} \right).$$

Alors la fonction d'onde s'écrit

$$\Psi = \begin{pmatrix} k_1 F_{11}^* + k_2 2^{\alpha-1/2} (z-1)^{-\alpha+1/2} F_{12}^* \\ \frac{1}{\lambda c_1} \left[k_1 \left(\frac{n(n+2\alpha) \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{\alpha+1/2} + c_2}{2\alpha+1} F_{11}^* + \frac{1}{4} \frac{(\kappa+1)(\kappa-1)}{\alpha+1/2} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{(2\alpha+1)/4} F_{13}^* \right) \right. \\ \left. + k_2 2^{\alpha-1/2} (z-1)^{1/2-\alpha} \left(\left(\frac{n(n+2\alpha) \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{\alpha+1/2} + c_2}{2\alpha+1} + (1/2 - \alpha)(z-1)^{-1} \right) \cdot F_{12}^* - \frac{1}{2} \frac{\kappa(\alpha+1/4\kappa)}{3/2-\alpha} F_{14}^* \right) \right] \end{pmatrix},$$

et les intégrales (5.1) s'écrivent

$$I_1 = \left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha + 3} (z + 1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi},$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2 c_1 (2\alpha + 1)^2} \left[\frac{n^2 (n + 2\alpha)^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1 - 2\alpha} (1 + z)^{1/2-\alpha} F_{16}^* + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha + 3} (z + 1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* + 2c_2 n(n + 2\alpha)z \right]_{\xi_0}^{\xi},$$

$$I_3 = \frac{1}{\lambda(2\alpha + 1)} \left[n(n + 2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha + 3} (z + 1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.184)$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* - \frac{1}{\lambda^2 c_1 (2\alpha+1)^2} \left(\frac{n^2 (n+2\alpha)^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} F_{16}^* \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* + 2c_2 n(n+2\alpha)z \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* + \frac{1}{\lambda^2 c_1 (2\alpha+1)^2} \left(\frac{n^2 (n+2\alpha)^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} F_{16}^* \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* + 2c_2 n(n+2\alpha)z \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
F_3 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda(2\alpha+1)} \left[n(n+2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \tag{5.185}
\end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda(2\alpha+1)} \left[n(n+2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda(2\alpha+1)} \left[n(n+2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
\tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{2} \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\lambda^2 c_1 (2\alpha+1)^2} \left[\frac{n^2 (n+2\alpha)^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} F_{16}^* + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* + 2c_2 n(n+2\alpha)z \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
\tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1 (2\alpha+1)^2} \left[\frac{n^2 (n+2\alpha)^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} F_{16}^* + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* + 2c_2 n(n+2\alpha)z \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
\tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda(2\alpha+1)} \left[n(n+2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\lambda(2\alpha+1)} \left[n(n+2\alpha)z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} (z+1)^{\alpha+3/2} F_{15}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \tag{5.186}
\end{aligned}$$

Cas particulier.

Posons $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 1$. Alors l'équation de Gegenbauer devient $(1 - z^2)\partial^2 \omega - 2\partial \omega + 2\omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = c_1 \frac{1+z}{1-z}$ et $\chi = \frac{(1-z)+c_2}{(1+z)\lambda c_1}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $\lambda = 1$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1+z}{1-z}, \quad \chi = \frac{1-z}{1+z}, \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.187)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U} \left(\frac{1}{2}, 1, 1; z \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z+1}{z-1} \\ \frac{1-z}{1+z} & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.188)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi \left(\frac{1}{2}, 1, 1; z \right) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+z)^2 \left(1 + \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right) \right) + 2(z+2) \\ (1-z^2) \left(1 + \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right) \right) + 2 \frac{(1-z)(2+z)}{(1+z)} \\ + 2 \frac{z^2 + (z^2-1) \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right) + 2z-1}{1+z} \end{pmatrix}. \quad (5.189)$$

La représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass s'écrit

$$F \left(\frac{1}{2}, 1, 1; z \right) = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} \left((\log((1-z)(1+z))) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right) \\ -\operatorname{Im} \left([\log(1+z) - \log(1-z) - z] \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right) \\ \operatorname{Re} \left(z \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.190)$$

et les composantes de la représentation paramétrique de la surface dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{11} &= -\frac{i}{2} \left(z \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{z \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\
\tilde{F}_{12} &= \frac{i}{2} \left((2\log(1-z) + z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{(2\log(1+z) - z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\
\tilde{F}_{21} &= \frac{i}{2} \left((2\log(1+z) - z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{(2\log(1-z) + z) \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\
\tilde{F}_{22} &= \frac{i}{2} \left(z \Big|_{\xi_0}^{\xi} + \overline{z \Big|_{\xi_0}^{\xi}} \right).
\end{aligned} \tag{5.191}$$

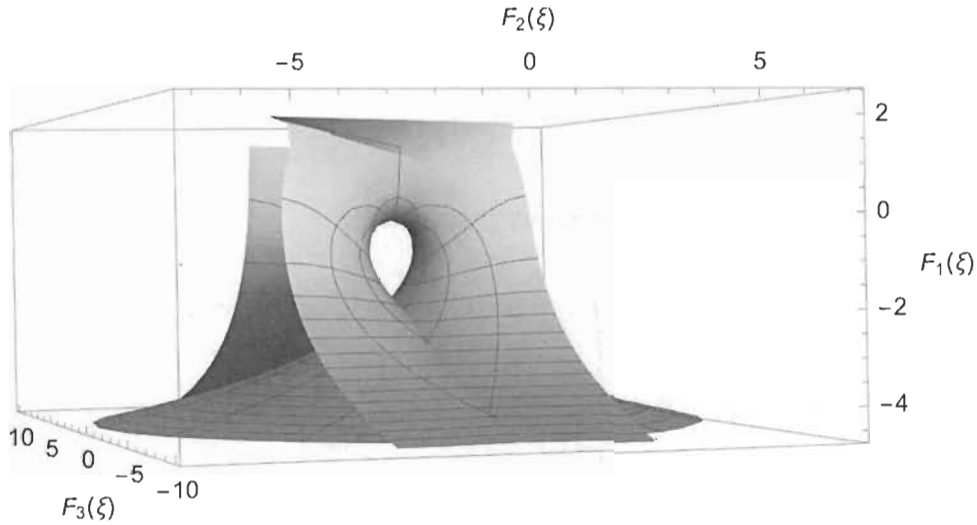


Figure 5.9 Représentation de l'équation de Gegenbauer dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.9 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 0$ à $\xi = re^{i\theta}$, $r \in [\frac{1}{100}, 10]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

L'impression 3D présentée à la figure 5.10 a été réalisée conjointement avec le département de Génie électrique et génie informatique et le département de Génie mécanique de l'Université du Québec à Trois-Rivières. Le nombre maximal de récursions de l'algorithme *ParametricPlot3D* de Mathematica a été fixé à $N = 4$ afin de raffiner la résolution. Puisqu'une

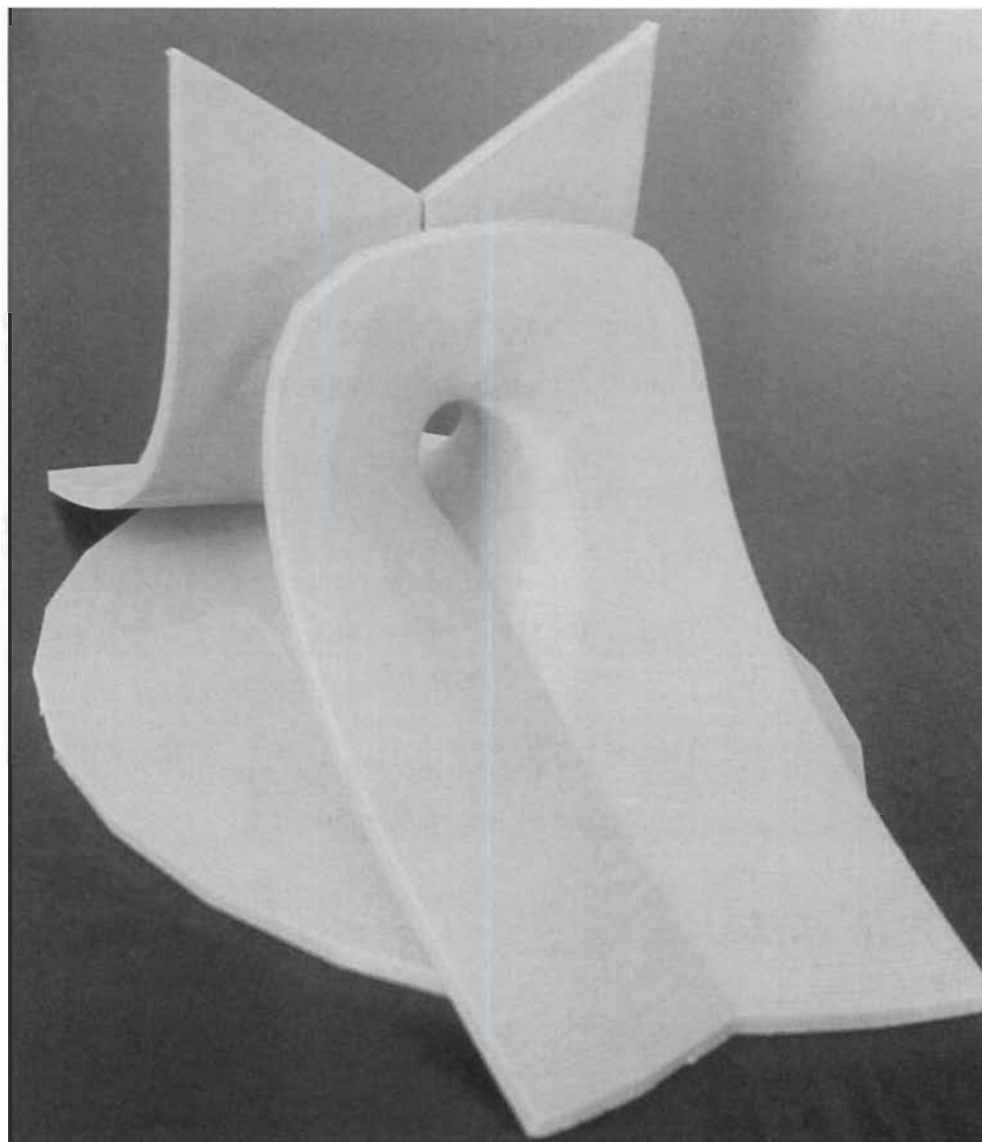


Figure 5.10 Impression 3D de la représentation de l'équation de Gegenbauer.

surface ne possède *a priori* aucune épaisseur, celle-ci a été générée à partir de l'option *Thickness*. Le modèle 3D a été créé en exportant l'image sous la forme d'un fichier .stl (stereolithography), créant une discrétisation du modèle par maillage polygonal. Le modèle a été redimensionné à 1200% à partir du logiciel Stratasys GrabCAD. L'impression 3D a été réalisée sur une imprimante Stratasys F170, à partir de plastique acrylonitrile butadiène styrène (ABS).

5.1.10 Équation de Jacobi

L'équation de Jacobi [26] en ω s'écrit

$$\Delta: (1-z^2)\partial^2\omega + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z)\partial\omega + n(n + \alpha + \beta + 1)\omega = 0, \quad (5.192)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $z \neq \pm 1$. Comparant les coefficients de (5.192) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67) et en intégrant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z}{1-z^2} &= -2\frac{\partial\eta}{\eta}, & \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{1-z^2} &= -\lambda\eta^2\partial\chi, \\ \Rightarrow \eta^2(z) &= c_1(1+z)^{-(\beta+1)}(1-z)^{-(\alpha+1)}, \\ \chi(z) &= -\frac{n(n + \alpha + \beta + 1)2^\alpha(z+1)^{\beta+1} {}_2F_1\left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{z+1}{2}\right) + c_2}{\lambda c_1(\beta+1)}, \end{aligned} \quad (5.193)$$

où $z \neq \pm 1, 0 \neq c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $\beta \neq -1$, $\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0$ et où ${}_2F_1\left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{z+1}{2}\right)$ est la fonction hypergéométrique ayant comme représentation intégrale

$${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z) = \frac{\Gamma(v_3)}{\Gamma(v_2)\Gamma(v_3 - v_2)} \int_0^1 \frac{\tau^{v_2-1}(1-\tau)^{v_3-v_2-1}}{(1-\tau z)^{v_1}} d\tau \quad (5.194)$$

qui converge si $\operatorname{Re}(v_3) > \operatorname{Re}(v_2) > 0$ [1]. La matrice de potentiel (4.61) a donc comme composantes

$$\begin{aligned} u_{11} &= -\frac{n(n + \alpha + \beta + 1)2^\alpha(z+1)^{\beta+1} {}_2F_1\left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{z+1}{2}\right) + c_2}{(\beta+1)(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}, \\ u_{12} &= \frac{-\lambda c_1}{(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}, \\ u_{21} &= \frac{(n(n + \alpha + \beta + 1)2^\alpha(z+1)^{\beta+1} {}_2F_1\left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{z+1}{2}\right) + c_2)^2}{\lambda c_1(\beta+1)^2(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}, \\ u_{22} &= \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)2^\alpha(z+1)^{\beta+1} {}_2F_1\left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{z+1}{2}\right) + c_2}{(\beta+1)(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}, \end{aligned} \quad (5.195)$$

où c_1 et λ sont non-nuls, $z \neq \pm 1$, $\beta \neq -1$ et $\operatorname{Tr}(\mathcal{U}) = 0$. En effectuant la substitution de η et χ (5.193) dans l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous trouvons l'équation de Jacobi

(5.192) en Ψ_1

$$\begin{aligned}
 & \partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \partial^2 \Psi_1 - \frac{2c_1^{1/2} (1+z)^{-(\beta+3)/2} (1-z)^{-(\alpha+3)/2}}{2c_1^{1/2} (1+z)^{-(\beta+1)/2} (1-z)^{-(\alpha+1)/2}} ((\alpha + \beta + 2)z + \alpha - \beta) \partial \Psi_1 \\
 & - \lambda c_1 (1+z)^{-(\beta+1)} (1-z)^{-(\alpha+1)} \lambda^{-1} c_1^{-1} (-n(n + \alpha + \beta + 1)) (1+z)^\beta (1-z)^\alpha \Psi_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1-z^2) \partial^2 \Psi_1 + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z) \partial \Psi_1 + n(n + \alpha + \beta + 1) \Psi_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Le polynôme de Jacobi est solution de cette équation et peut être exprimé par la formule de Rodrigues [1]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \partial^n \left((1-z)^{\alpha+n} (1+z)^{\beta+n} \right). \quad (5.196)$$

La solution générale de l'équation de Jacobi s'exprime en termes de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z)$

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(z) = & k_1 {}_2F_1(-n, \alpha + \beta + n + 1; \alpha + 1; (1-z)/2) \\
 & + 2^\alpha k_2 (z-1)^{-\alpha} {}_2F_1(-\alpha - n, \beta + n + 1; 1 - \alpha; (1-z)/2), \quad (5.197)
 \end{aligned}$$

où le polynôme de Jacobi est lié à la fonction hypergéométrique par la relation [1]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \binom{n + \alpha}{n} {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1, (1-z)/2). \quad (5.198)$$

Par (4.65), nous trouvons pour la deuxième composante de la fonction d'onde Ψ

$$\Psi_2 = \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{n(n+\alpha+\beta+1)2^\alpha}{\lambda c_1(\beta+1)} (z+1)^{\beta+1} {}_2F_1 \left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{z+1}{2} \right) + \frac{c_2}{\lambda c_1(\beta+1)} \right) \Psi_1 \\
&\quad - \frac{k_1 n(n+\alpha+\beta+1) {}_2F_1(1-n, \alpha+\beta+n+2; \alpha+2; (1-z)/2)}{2(\alpha+1)\lambda c_1(1+z)^{-(\beta+1)}(1-z)^{-(\alpha+1)}} \\
&\quad + \frac{k_2 2^\alpha \alpha (z-1)^{-(\alpha+1)} {}_2F_1(-\alpha-n, \beta+n+1; 1-\alpha; (1-z)/2)}{\lambda c_1(1+z)^{-(\beta+1)}(1-z)^{-(\alpha+1)}} \\
&\quad + \frac{k_2 2^\alpha (z-1)^{-\alpha} (\alpha+n)(\beta+n+1) {}_2F_1(-\alpha-n+1, \beta+n+2; 2-\alpha; (1-z)/2)}{2\lambda c_1(\alpha-1)(1+z)^{-(\beta+1)}(1-z)^{-(\alpha+1)}}
\end{aligned} \tag{5.199}$$

car $\partial {}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z) = \frac{v_1 v_2}{v_3} {}_2F_1(v_1+1, v_2+1; v_3+1; z)$ [41]. Posons

$$\begin{aligned}
F_1^* &:= {}_2F_1(-n, \alpha+\beta+n+1; \alpha+1; (1-z)/2), \\
F_2^* &:= {}_2F_1(-\alpha-n, \beta+n+1; 1-\alpha; (1-z)/2), \\
F_3^* &:= {}_2F_1(-\alpha, \beta+1; \beta+2; (1+z)/2), \\
F_4^* &:= {}_2F_1(1-n, \alpha+\beta+n+2; \alpha+2; (1-z)/2), \\
F_5^* &:= {}_2F_1(-\alpha-n+1, \beta+n+2; 2-\alpha; (1-z)/2), \\
\kappa &= n(n+\alpha+\beta+1).
\end{aligned}$$

Alors, la fonction d'onde Ψ (4.59) ayant comme composantes $\Psi_1(z)$ et $\Psi_2(z)$ (par hypothèse) et satisfaisant le **PL** (3.73) est

$$\Psi(\alpha, \beta, n, \lambda; z) = \begin{pmatrix} k_1 F_1^* + 2^\alpha k_2 (z-1)^{-\alpha} F_2^* \\ \frac{1}{\lambda c_1} \left[-k_1 \kappa \left(\frac{2^\alpha (z+1)^{\beta+1} F_3^* + c_2}{\beta+1} F_1^* + \frac{1}{2(\alpha+1)} (1+z)^{\beta+1} (1-z)^{\alpha+1} F_4^* \right) \right. \\ \left. + k_2 \left(-2^\alpha \frac{\kappa (z+1)^{\beta+1} F_3^* + c_2}{\beta+1} (z-1)^{-\alpha} F_2^* \right. \right. \\ \left. \left. + 2^\alpha (-1)^\alpha \left(-\alpha (1+z)^{\beta+1} F_2^* + \frac{(\alpha+n)(\beta+n+1)}{2(\alpha-1)} (1+z)^{\beta+1} (1-z) F_5^* \right) \right] \right] \end{pmatrix}. \tag{5.200}$$

Les deux premières intégrales de (5.1) s'écrivent

$$I_1 = -c_1 \cdot 2^{-(\alpha+2)} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} {}_2F_1 \left(1-\beta, \alpha+1; 2-\beta; \frac{1+z}{2} \right) + \frac{2}{\beta} {}_2F_1 \left(-\beta, \alpha; 1-\beta; \frac{1+z}{2} \right) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi},$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\overbrace{\kappa^2 2^{2\alpha} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+z)^{\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}} {}_2F_1 \left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{1+z}{2} \right)^2 dz}^{(i)} + \overbrace{c_2^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{(1+z)^{\beta+1} (1-z)^{\alpha+1}} dz}^{(ii)} \right. \\ \left. - c_2 \kappa 2^{\alpha+1} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{{}_2F_1 \left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{1+z}{2} \right)}{(1-z)^{\alpha+1}} dz \right]_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.201)$$

Remarque. Afin d'exprimer la fonction ${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z)$ sous la forme d'une série convergente, posons $v_3 \notin \mathbb{Z}^-$ si $|z| < 1$, et $\Re(v_3 - v_1 - v_2) > 0$, $v_3 \notin \mathbb{Z}^-$ si $|z| = 1$. Nous pouvons alors écrire ${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(v_1)_r (v_2)_r}{(v_3)_r} \frac{z^r}{r!}$. Pour la fonction ${}_2F_1(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{1+z}{2})$, nous posons par exemple $\beta+2 \notin \mathbb{Z}^-$ et $|z+1| < 2$. Nous pouvons alors écrire ${}_2F_1(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{1+z}{2}) = (\beta+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_r}{(\beta+r+1)} \frac{(z+1)^r}{2^r r!}$ après simplification des factorielles ascendantes.

Ainsi,

$$(i) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+z)^{\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}} {}_2F_1 \left(-\alpha, \beta+1; \beta+2; \frac{1+z}{2} \right)^2 dz \\ = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+z)^{\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_r (\beta+1)}{(\beta+r+1) \cdot 2^r} \frac{(z+1)^r}{r!} \right)^2 dz \\ = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+z)^{\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}} (\beta+1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1) s! k! \cdot 2^{s+k}} dz \\ = (\beta+1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k}{(\beta+s+1)(\beta+k+1) s! k! \cdot 2^{s+k}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1+z)^{s+k+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}} dz \\ = \frac{(\beta+1)^2}{2^{\alpha}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k+\beta+1}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1)(\beta+s+k+1) s! k! \cdot 2^{s+k}} \\ \cdot \left({}_2F_1 \left(s+k+\beta+1, \alpha+1; s+k+\beta+2; \frac{1+z}{2} \right) \right. \\ \left. - {}_2F_1 \left(s+k+\beta+1, \alpha; s+k+\beta+2; \frac{1+z}{2} \right) \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.202)$$

Un test de convergence de D'Alembert montre que les égalités ci-haut sont vraies si $|z+1| < 2|\alpha|$. Cette condition s'ajoute aux conditions sur les paramètres de la fonction hypergéométrique assurant l'existence d'une représentation en série équivalente.

Les intégrales (ii) et (iii) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 (ii) &= -\frac{1}{2^{\alpha+2}}(z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} {}_2F_1 \left(1-\beta, \alpha+1; 2-\beta; \frac{1+z}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\beta} {}_2F_1 \left(-\beta, \alpha; 1-\beta; \frac{1+z}{2} \right) \right) \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}, \\
 (iii) &= (\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1} {}_2F_1 \left(s+1, \alpha+1; s+2; \frac{1+z}{2} \right)}{(\beta+s+1)(s+1)s! \cdot 2^{s+\alpha+1}} \right] \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.203)
 \end{aligned}$$

Pour l'intégrale I_3 de (5.1), nous posons les mêmes hypothèses que pour l'intégrale (i) afin d'assurer la convergence de la représentation en série de la fonction hypergéométrique et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -\frac{1}{\lambda(\beta+1)} \left[\kappa(\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1} {}_2F_1 \left(s+1, \alpha+1; s+2; \frac{1+z}{2} \right)}{(\beta+s+1)(s+1)s! \cdot 2^{s+1}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}}(z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} {}_2F_1 \left(1-\beta, \alpha+1; 2-\beta; \frac{1+z}{2} \right) + \frac{2}{\beta} {}_2F_1 \left(-\beta, \alpha; 1-\beta; \frac{1+z}{2} \right) \right) \right] \Bigg|_{\xi_0}^{\xi}. \quad (5.204)
 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
 F_6^* &:= {}_2F_1 \left(1-\beta, \alpha+1; 2-\beta; \frac{1+z}{2} \right), \\
 F_7^* &:= {}_2F_1 \left(-\beta, \alpha; 1-\beta; \frac{1+z}{2} \right), \\
 F_8^* &:= {}_2F_1 \left(s+k+\beta+1, \alpha+1; s+k+\beta+2; \frac{1+z}{2} \right), \\
 F_9^* &:= {}_2F_1 \left(s+k+\beta+1, \alpha; s+k+\beta+2; \frac{1+z}{2} \right), \\
 F_{10}^* &:= {}_2F_1 \left(s+1, \alpha+1; s+2; \frac{1+z}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.22) de la surface plongée dans \mathbb{R}^3 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-\frac{c_1}{2^{\alpha+2}} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} F_6^* - \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda^2 c_1} [\kappa^2 (\beta+1)^2 2^\alpha \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k+\beta+1}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1)(\beta+s+k+1) s! k! 2^{s+k}} (F_8^* - F_9^*) \right) - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \\
 &\quad \left. - c_2 \kappa (\beta+1) 2^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1) s! 2^{s+\alpha+1}} F_{10}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
 F_2 &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(-\frac{c_1}{2^{\alpha+2}} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} F_6^* - \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \frac{1}{\lambda^2 c_1} [\kappa^2 (\beta+1)^2 2^\alpha \right. \\
 &\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k+\beta+1}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1)(\beta+s+k+1) s! k! 2^{s+k}} (F_8^* - F_9^*) \right) - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \\
 &\quad \left. - c_2 \kappa (\beta+1) 2^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1) s! 2^{s+\alpha+1}} F_{10}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
 F_3 &= \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{\lambda (\beta+1)} \left[\kappa (\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1) s! \cdot 2^{s+1}} F_{10}^* \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \quad (5.205)
 \end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique (3.65) de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{11} &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda (\beta+1)} \left[\kappa (\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1) s! \cdot 2^{s+1}} F_{10}^* - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\lambda (\beta+1)} \left[\kappa (\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1) s! \cdot 2^{s+1}} F_{10}^* - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* - \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{12} = & \frac{i}{2} \left(c_1 \cdot 2^{-(\alpha+2)} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & + \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\kappa^2 (\beta+1)^2 2^\alpha \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k+\beta+1}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1)(\beta+s+k+1)s!k!2^{s+k}} (F_8^* - F_9^*) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \\ & \left. - \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) + c_2 \kappa (\beta+1) 2^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1)s!2^{s+\alpha+1}} F_{10}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{21} = & \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\kappa^2 (\beta+1)^2 2^\alpha \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k+\beta+1}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1)(\beta+s+k+1)s!k!2^{s+k}} (F_8^* - F_9^*) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) - c_2 \kappa (\beta+1) 2^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1)s!2^{s+\alpha+1}} F_{10}^* \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & \left. + 2^{-(\alpha+2)} c_1 \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{22} = & -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda(\beta+1)} \left[\kappa(\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1)s! \cdot 2^{s+1}} F_{10}^* - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* + \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda(\beta+1)} \left[\kappa(\beta+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1)s! \cdot 2^{s+1}} F_{10}^* - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} F_6^* - \frac{2}{\beta} F_7^* \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \end{aligned} \quad (5.206)$$

Cas particulier.

Posons $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $n = 1$. Alors l'équation de Jacobi devient $(1-z^2)\partial^2\omega + (1-5z)\partial\omega + 5\omega = 0$ et par association des coefficients avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , nous trouvons les fonctions holomorphes $\eta^2 = \frac{c_1}{(1+z)^3(1-z)^2}$ et $\chi = -\frac{10(1+z)^3 {}_2F_1(-1,3;4;\frac{1+z}{2}) + c_2}{3\lambda c_1}$. Posons pour les constantes d'intégration et le paramètre spectral $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$

et $\lambda = -1$. Les fonctions simplifiées deviennent

$$\eta^2 = \frac{1}{(1+z)^3(1-z)^2}, \quad \chi = \frac{10}{3}(1+z)^3 {}_2F_1\left(-1, 3; 4; \frac{1+z}{2}\right), \quad \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\chi = 0. \quad (5.207)$$

La matrice de potentiel \mathcal{U} s'écrit alors

$$\mathcal{U}(1, 2, 1; -1; z) = \begin{pmatrix} \frac{-\frac{10}{3} {}_2F_1(-1, 3; 4; \frac{1+z}{2})}{(1-z)^{-2}} & \frac{(1+z)^{-3}}{(1-z)^{-2}} \\ -\frac{\frac{100}{9}(1+z)^3 {}_2F_1^2(-1, 3; 4; \frac{1+z}{2})}{(1-z)^{-2}} & \frac{\frac{10}{3} {}_2F_1(-1, 3; 4; \frac{1+z}{2})}{(1-z)^{-2}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (5.208)$$

et la fonction d'onde découlant de ces choix particuliers est

$$\Psi(1, 2, 1; -1; z) = \begin{pmatrix} 2\frac{z(15z^2+12z-13)-8}{(z-1)(z+1)^2} + 3\frac{5z^2-6z+1}{z-1}(\log(z-1) - \log(z+1)) + z - \frac{1}{5} \\ \frac{5}{12}(5-3z)((z-\frac{1}{5})(z+1)^3(z+1)(z-1)^{-1}(2z(15z^2+12z-13)-16)) \\ + (\frac{15}{12}(5-3z)(z+1)^3(z-1)^{-1} + 15(z-1)^2(z+1)^3)(\log(z-1) - \log(z+1)) \\ + z(z(z(z+31)+28)-52)-49+17 \end{pmatrix}. \quad (5.209)$$

Les intégrales (5.1) s'écrivent

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{16} \left[\frac{-6z(z+1)+4}{(z-1)(z+1)^2} + 3(\log(z+1) - \log(z-1)) \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\ I_2 &= \frac{25}{144} \left[\frac{9}{4}z^4 + 5z^3 - \frac{17}{2}z^2 - 55z + \frac{32}{1-z} - 48\log(z-1) + \frac{225}{4} \right]_{\xi_0}^{\xi}, \\ I_3 &= -\frac{5}{12} \left[\frac{2}{z-1} + 3\log(z-1) \right]_{\xi_0}^{\xi}. \end{aligned} \quad (5.210)$$

Les composantes de la représentation paramétrique d'Enneper-Weierstrass

$$F(1, 2, 1; -1; z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{Re}[I_1 - I_2] \\ -\frac{1}{2}\operatorname{Im}[I_1 + I_2] \\ \operatorname{Re}[I_3] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.211)$$

s'écrivent

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{32} \operatorname{Re} \left(\left[\left(\frac{-6z(z+1)+4}{(z-1)(z+1)^2} + 3(\log(z+1) - \log(z-1)) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{25}{9} \left(\frac{9}{4}z^4 + 5z^3 - \frac{17}{2}z^2 - 55z + \frac{32}{1-z} - 48\log(z-1) + \frac{225}{4} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
F_2 &= -\frac{1}{32} \operatorname{Im} \left(\left[\left(\frac{-6z(z+1)+4}{(z-1)(z+1)^2} + 3(\log(z+1) - \log(z-1)) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{25}{9} \left(\frac{9}{4}z^4 + 5z^3 - \frac{17}{2}z^2 - 55z + \frac{32}{1-z} - 48\log(z-1) + \frac{225}{4} \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
F_3 &= -\frac{5}{12} \operatorname{Re} \left(\left[\frac{2}{z-1} + 3\log(z-1) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right). \tag{5.212}
\end{aligned}$$

Les composantes de la représentation paramétrique de la surface plongée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$

$$\tilde{F}(1, 2, 1; -1; z) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} I_3 + \bar{I}_3 & I_1 - \bar{I}_2 \\ -I_2 + \bar{I}_1 & -I_3 - \bar{I}_3 \end{pmatrix} \mathfrak{su}(2), \quad \operatorname{Tr}(\tilde{F}) = 0, \quad \tilde{F}^\dagger = -\tilde{F} \tag{5.213}$$

s'écrivent

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{11} &= \frac{5i}{24} \left(\left[\frac{2}{z-1} + 3\log(z-1) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\left[\frac{2}{z-1} + 3\log(z-1) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\
\tilde{F}_{12} &= -\frac{i}{32} \left(\left[\frac{-6z(z+1)+4}{(z-1)(z+1)^2} + 3(\log(z+1) - \log(z-1)) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{25}{9} \left[\frac{9}{4}z^4 + 5z^3 - \frac{17}{2}z^2 - 55z + \frac{32}{1-z} - 48\log(z-1) + \frac{225}{4} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \\
\tilde{F}_{21} &= \frac{i}{32} \left(\frac{25}{9} \left[\frac{9}{4}z^4 + 5z^3 - \frac{17}{2}z^2 - 55z + \frac{32}{1-z} - 48\log(z-1) + \frac{225}{4} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
&\quad \left. - \overline{\left[\frac{-6z(z+1)+4}{(z-1)(z+1)^2} + 3(\log(z+1) - \log(z-1)) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right), \\
\tilde{F}_{22} &= -\frac{5i}{24} \left(\left[\frac{2}{z-1} + 3\log(z-1) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\left[\frac{2}{z-1} + 3\log(z-1) \right]_{\xi_0}^{\xi}} \right). \tag{5.214}
\end{aligned}$$

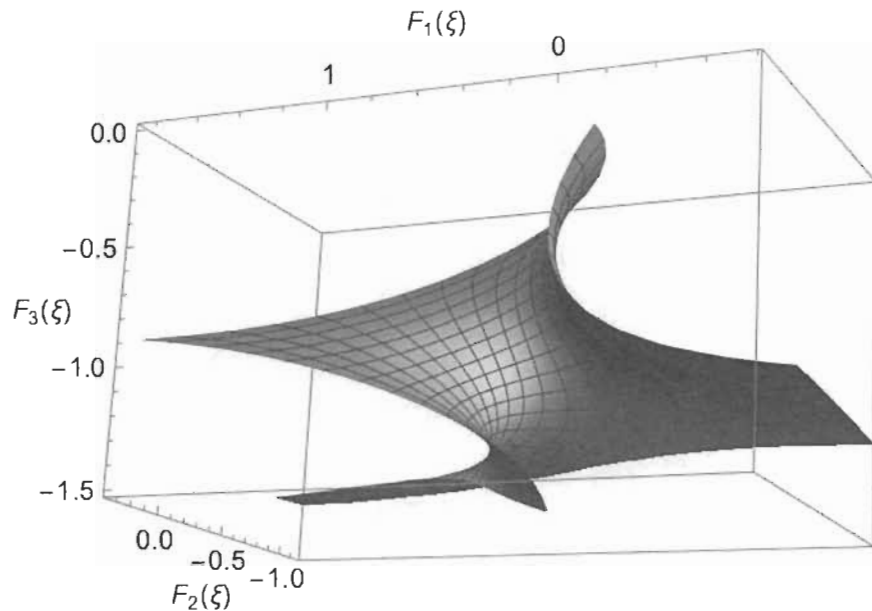


Figure 5.11 Représentation de l'équation de Jacobi dans \mathbb{R}^3 .

Remarque. La figure 5.11 est obtenue par la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), en intégrant de $\xi_0 = 0$ à $\xi = x + iy$, $x \in [-1 + \frac{1}{100}, 0]$, $y \in [0, 1 - \frac{1}{100}]$.

5.2 Condition de compatibilité entre la fonction d'onde et la matrice de potentiel

Dans chacune des analyses de cas précédentes, nous avons calculé la matrice de potentiel et la fonction d'onde

$$\mathcal{U}(\lambda, z) = \lambda \eta^2(z) \begin{pmatrix} \chi(z) & -1 \\ \chi^2(z) & -\chi(z) \end{pmatrix}, \quad \Psi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_2(z) \end{pmatrix}, \quad (5.215)$$

où $\Psi_1(z)$ est la solution générale de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , et donc de l'EDO considérée dans chaque cas, par association des coefficients. Nous vérifions dans cette section que les éléments \mathcal{U} et Ψ calculés dans les cas particuliers (où les paramètres de l'EDO et les

constantes d'intégration sont fixés) sont bien des solutions du **PL**. Posons

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (5.216)$$

Nous calculons Λ dans chaque cas et montrons que

$$\Lambda = \partial\Psi \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_1 = \partial\Psi_1(z) \\ \Lambda_2 = \partial\Psi_2(z) \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{U}(\lambda)\Psi = \partial\Psi. \quad (5.217)$$

1. Équation de Legendre :

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + \frac{1}{z^2-1} (z^2 + z - 1) \\ z \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + \frac{1}{z^2-1} (z^2 + z - 1) \right] \end{pmatrix} = \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial\Psi$$

2. Équation de Legendre associée :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\lambda)\Psi &:= \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(z^2-1)^{3/2}} (z(z^2-1) \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + z^3 + 2z^2 - z - 4) \\ \left(\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - 4z \right) \left[\frac{1}{(z^2-1)^{3/2}} (z(z^2-1) \log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + z^3 + 2z^2 - z - 4) \right] \end{pmatrix} \\ &= \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial\Psi \end{aligned}$$

3. Équation de Bessel :

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathcal{J}_1(z) + \mathcal{Y}_1(z)) \\ z^2 [-(\mathcal{J}_1(z) + \mathcal{Y}_1(z))] \end{pmatrix} = \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial\Psi$$

4. Équation de Chebyshev de première espèce :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\lambda)\Psi &:= \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) + i \cosh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right)}{z^2-1} \\ \arcsin(z) \left[\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) + i \cosh\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right)}{z^2-1} \right] \end{pmatrix} \\ &= \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial \Psi\end{aligned}$$

5. Équation de Chebyshev de seconde espèce :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\lambda)\Psi &:= \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \left(\frac{\sinh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) + i \cosh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right)}{z^2-1} \right) \\ \arcsin(z) \left[\sqrt{3} \left(\frac{\sinh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right) + i \cosh\left(\sqrt{3} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{z^2-1}} \arcsin(z)\right)}{z^2-1} \right) \right] \end{pmatrix} \\ &= \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial \Psi\end{aligned}$$

6. Équation de Laguerre :

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Ei(z) + 1) - \frac{e^z}{z} \\ e^{-z} \left[(Ei(z) + 1) - \frac{e^z}{z} \right] \end{pmatrix} = \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial \Psi$$

7. Équation de Laguerre associée :

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ei(z) - e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) + 1 \\ \Gamma(3, z) \left[Ei(z) - e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) + 1 \right] \end{pmatrix} = \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial \Psi$$

8. Équation d'Hermite :

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \left(ze^{z^2}(\operatorname{erf}(z) + 1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \\ \operatorname{erf}(z) \left[2 \left(ze^{z^2}(\operatorname{erf}(z) + 1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \end{pmatrix} = \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial\Psi$$

9. Équation de Gegenbauer :

$$\mathcal{U}(\lambda)\Psi := \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{z-1} \left((z^2 - 1) \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right) + z^2 + 2z - 1 \right) \\ \frac{1-z}{1+z} \left[\frac{2}{z-1} \left((z^2 - 1) \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right) + z^2 + 2z - 1 \right) \right] \end{pmatrix} = \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial\Psi$$

10. Équation de Jacobi :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\lambda)\Psi &:= \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \log \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{z(z(z(z+31)+28)-52)-49+17}{(z+1)^3(z-1)^2} \\ \frac{10}{3}(z+1)^3 {}_2F_1 \left(-1, 3; 4; \frac{1+z}{2} \right) \left[15 \log \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{z(z(z(z+31)+28)-52)-49+17}{(z+1)^3(z-1)^2} \right] \end{pmatrix} \\ &= \partial \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} := \partial\Psi \end{aligned}$$

Nous remarquons un phénomène récurrent dans chaque cas :

$$\partial\Psi_2(z) = f(z)\partial\Psi_1(z) \tag{5.218}$$

pour une certaine fonction f . Nous montrons dans la prochaine section que la relation $\partial\Psi_2 = f(z)\partial\Psi_1$ est toujours vraie et trouvons une formule explicite pour les fonctions méromorphes η et χ , formule s'exprimant en fonction des coefficients de l'EDO considérée.

5.3 Formule explicite des fonctions méromorphes η et χ

Dans le contexte où $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ est une solution du **PL** et où l'on effectue une identification entre les coefficients de l'EDO

$$\Delta: \quad \partial^2 \omega + \frac{q(z)}{p(z)} \partial \omega + \frac{r(z)}{p(z)} \omega = 0, \quad p \neq 0,$$

et ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ , montrons que

$$\partial \Psi_2(z) = f(z) \partial \Psi_1(z), \quad f(z) = \chi(z), \quad \begin{cases} \eta(z) = k_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right\} \\ \chi(z) = \frac{k_2}{\lambda} \int \exp \left\{ \int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right\} \frac{r(z)}{p(z)} dz, \end{cases}.$$

où $k_1, k_2 = -k_1^{-2}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et où les zéros d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de $p(z)$, s'ils existent, sont des pôles d'ordre k des fonctions $\frac{q(z)}{p(z)}$ et $\frac{r(z)}{p(z)}$.

Démonstration. Soit la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, solution du PL, *i.e.* $\partial \Psi = \mathcal{U}(\lambda) \Psi$. Considérons l'EDO linéaire homogène du second ordre (4.68)

$$\Delta: \quad \partial^2 \omega + \frac{q(z)}{p(z)} \partial \omega + \frac{r(z)}{p(z)} \omega = 0, \quad p \neq 0, \quad (5.219)$$

équation pour laquelle nous effectuons une identification des coefficients avec l'EDO du second ordre découlant des surfaces CMC- λ (4.67)

$$\partial^2 \Psi_1 - \left(2 \frac{\partial \eta}{\eta} \right) \partial \Psi_1 - (\lambda \eta^2 \partial \chi) \Psi_1 = 0. \quad (5.220)$$

Supposons que les fonctions p , q , et r sont intégrables et que p possède un nombre fini de zéros. Par hypothèse, $\Psi_1(z)$ est une solution de Δ et pour $\varphi = \Psi_1 \chi - \Psi_2$,

$$\partial \Psi = \mathcal{U}(z) \Psi \Leftrightarrow \begin{cases} \partial \Psi_1 = \lambda \eta^2(z) \varphi(z) \\ \partial \Psi_2 = \chi [\lambda \eta^2(z) \varphi(z)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_2 = \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2} \\ \partial \Psi_2 = \chi \partial \Psi_1 \end{cases}. \quad (5.221)$$

Or,

$$\partial\Psi_2 = \partial\left(\chi\Psi_1 - \frac{\partial\Psi_1}{\lambda\eta^2}\right) = \partial\Psi_1 + \chi\partial\Psi_1 - \frac{1}{\lambda}\left(\partial\left(\frac{1}{\eta^2}\right)\partial\Psi_1 + \frac{1}{\eta^2}\partial^2\Psi_1\right) \quad (5.222)$$

et par association des coefficients de l'équation Δ (4.68) avec ceux de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous avons que

$$-2\frac{\partial\eta}{\eta} = \frac{q(z)}{p(z)} \Leftrightarrow \eta(z) = k_1 \text{Exp}\left\{-\frac{1}{2}\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\}, \quad k_1 = -k_2^{-1/2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (5.223)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\eta^2} = -k_2 \text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\} \Rightarrow \partial\left(\frac{1}{\eta^2}\right) = -k_2 \frac{q(z)}{p(z)} \text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\} \quad (5.224)$$

et par substitution de (5.224) dans (5.222), nous trouvons que

$$\partial\Psi_2 = \partial\Psi_1 + \chi\partial\Psi_1 + \frac{k_2}{\lambda}\left(\frac{q(z)}{p(z)} \text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\}\partial\Psi_1 + \text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\}\partial^2\Psi_1\right).$$

Toujours par association des coefficients de l'EDO Δ (4.68) avec les coefficients de l'EDO découlant des surfaces CMC- λ (4.67), nous avons que

$$-\lambda\eta^2\partial\chi = \frac{r(z)}{p(z)} \Leftrightarrow \chi(z) = \frac{k_2}{\lambda} \int \text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\} \frac{r(z)}{p(z)} dz.$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial\Psi_2 = \frac{k_2}{\lambda} \left(\text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\} \overbrace{\left(\partial^2\Psi_1 + \frac{q(z)}{p(z)}\partial\Psi_1 + \frac{r(z)}{p(z)}\Psi_1\right)}^{=0 \text{ par hypothèse}} \right. \\ \left. + \int \text{Exp}\left\{\int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right\} \frac{r(z)}{p(z)} dz \partial\Psi_1 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \partial \Psi_2 = \frac{k_2}{\lambda} \int \underbrace{\text{Exp} \left\{ \int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right\}}_{f(z)} \frac{r(z)}{p(z)} dz \quad \partial \Psi_1 \quad (5.225)$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial \Psi_2 = \chi(z) \partial \Psi_1. \quad (5.226)$$

□

La relation (5.226) s'explique par le fait que nous avons posé $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ comme étant une solution du **PL**. Nous retrouvons ainsi dans chaque cas les relations (4.62) découlant de ce contexte

$$\partial \Psi = \mathcal{U}(z) \Psi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial \Psi_1 = \lambda \eta^2(z) \varphi(z) \\ \partial \Psi_2 = \chi [\lambda \eta^2(z) \varphi(z)] \end{cases} \Rightarrow \quad \partial \Psi_2 = \chi \partial \Psi_1, \quad (5.227)$$

où $\varphi := \Psi_1 \chi - \Psi_2$.

Remarque. Dans chaque EDO étudiée dans ce chapitre, les quotients $\frac{q(z)}{p(z)}$ et $\frac{r(z)}{p(z)}$ possèdent un nombre fini de pôles et sont intégrables.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

L'objectif principal de cette étude était de construire les surfaces minimales associées à divers polynômes orthogonaux (**PO**) classiques, par la méthode des surfaces solitoniques. Cet objectif a été atteint. En effet, le problème linéaire (**PL**) a été résolu dans chaque analyse de cas du chapitre 5 et les matrices de potentiel, de même que la fonction d'onde, ont été déterminées. De plus, la forme explicite des surfaces a été calculée. Celles-ci sont maintenant connues.

Dans le chapitre 3, dans le contexte où une surface est plongée dans l'espace hyperbolique $H^3(\lambda)$ et où $H = \lambda$, nous avons montré à la section 3.3 que les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (GMC) se réduisent à une équation de Liouville (3.98) ayant pour solution générale (3.100), résultat identique au résultat présenté en (3.18) et (3.71) pour les surfaces minimales plongées dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 ($H = 0$).

Nous avons présenté au chapitre 4 une nouvelle méthode de transformations de jagues permettant de passer d'un **PL** de la forme (3.66) à un **PL** simplifié de la forme (3.73)

$$\partial\Psi = \lambda\eta^2 \begin{pmatrix} \chi & -1 \\ \chi^2 & -\chi \end{pmatrix} \Psi, \quad \bar{\partial}\Psi = \mathbf{0},$$

où la fonction d'onde recherchée est holomorphe et où la matrice de potentiel $\mathcal{U}(\lambda; \chi(z), \eta(z))$ s'écrit en termes des deux fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22) et comprend un paramètre libre λ . Nous avons exprimé le système d'ordre premier (3.73) par une EDO du second ordre de la forme (4.67)

$$\partial^2\Psi_1 - 2\frac{\partial\eta}{\eta}\partial\Psi_1 - \lambda\eta^2\partial\chi\Psi_1 = 0,$$

où Ψ_1 est la première composante de la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$. Le fait que les **PO** sont solution d'une EDO linéaire homogène du second ordre de la forme (4.68)

$$\partial^2\omega + \frac{q(z)}{p(z)}\partial\omega + \frac{r(z)}{p(z)}\omega = 0, \quad p \neq 0,$$

a permis une comparaison des équations (4.67) et (4.68), car de même nature. Nous avons effectué une association entre les coefficients de ces EDOs, permettant de solutionner le **PL** associé aux **PO** décrits par (4.68) et de déterminer la forme explicite de la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22).

Dans le chapitre 5, le **PL** a ainsi été résolu de manière explicite et les surfaces associées plongées dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, ont été déterminées pour les cas suivants : Legendre, Legendre associée, Bessel, Chebyshev de première espèce, Chebyshev de seconde espèce, Laguerre, Laguerre associée, Hermite, Gegenbauer et Jacobi. Ces résultats sont regroupés sous la forme de tables en annexe 7.A. Cette annexe comprend neuf tables pour dix analyses de cas. En effet, bien que l'équation de Chebyshev de première et de seconde espèce se ressemblent (seul le paramètre diffère), nous avons traité ces deux équations comme des cas séparés, et avons constaté que les résultats associés à l'équation de Chebyshev de seconde espèce peuvent être obtenus à partir des résultats associés à l'équation de Chebyshev de première espèce, par la transformation $n \mapsto \sqrt{n}\sqrt{n+2}$. Les tables de l'annexe 7.A montrent que l'expression explicite générale des familles de surfaces obtenues est composée de plusieurs termes. Rappelons que dans chaque analyse de cas du chapitre 5, nous avons illustré un cas particulier de surface obtenue en fixant les constantes. Par exemple, la première composante de la représentation d'Enneper-Weierstrass de la famille de surfaces associées à l'équation de Bessel (5.68) s'écrit

$$F_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda^2 c} \left[\left(\lambda^2 c^2 - c_2^2 + \frac{p^2 z^2}{2} \right) \log(z) - c_2 p^2 \log^2(z) - \frac{p^4}{3} \log^3(z) - (4p^2 - 8c_2 + z^2) \frac{z^2}{16} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)$$

alors que la première composante de la surface fixée donnée à titre d'exemple (5.73) se réduit à

$$F_1^0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left[\log(z) - \frac{z^4}{4} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right).$$

Ainsi, nous sommes en mesure d'obtenir une expression explicite, pouvant être programmée dans un logiciel de calcul symbolique.

Le cas de l'équation de Bessel illustre bien que l'expression explicite de la représentation d'Enneper-Weierstrass ainsi que la description quaternionique ne s'écrivent pas nécessairement en terme des **PO** considérés. Cela est dû au fait que l'association des coefficients de l'EDO (4.67) avec l'EDO décrivant des **PO** (4.68) mène à des nouvelles EDOs décrites en (4.70) et en (4.71), à résoudre pour les fonctions arbitraires η et χ . Cependant, les **PO** qui solutionnent

l'EDO considérée apparaissent dans la forme explicite de la fonction d'onde $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$. En effet, par définition, la première composante Ψ_1 est la solution générale de l'EDO (4.68), alors que la deuxième composante s'écrit par la relation (4.65)

$$\Psi_2 = \chi \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\lambda \eta^2}. \quad (6.1)$$

Cette relation fait intervenir la dérivée de la solution générale Ψ_1 et a pu, dans chaque cas, être simplifiée par une expression strictement algébrique, en tirant profit de relations de récurrence pour les **PO** qui sont bien connues. Il s'agit d'un résultat nouveau, car nous étions incertains, *a priori*, d'être en mesure d'effectuer de telles simplifications.

Dans la section 5.2, nous avons vérifié la compatibilité entre la matrice de potentiel (4.61) et la fonction d'onde (4.59) pour chaque analyse de cas, montrant que le **PL** (3.73) est satisfait. Ces vérifications ont montré empiriquement la relation différentielle liant les composantes de la fonction d'onde

$$\partial \Psi_2(z) = \chi(z) \partial \Psi_1(z) \quad (6.2)$$

où χ est une des fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass. Cette relation découle des égalités (4.62) obtenues du **PL** simplifié par transformations de jagues (3.73). Aussi, la section 5.2 a permis de déterminer la forme explicite des fonctions arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass en termes des coefficients de l'EDO (4.68)

$$\eta(z) = k_1 \text{Exp} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right\}, \quad \chi(z) = \frac{k_2}{\lambda} \int \text{Exp} \left\{ \int_0^z \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right\} \frac{r(z)}{p(z)} dz, \quad (6.3)$$

résultat présenté à la section 5.3.

Certaines analyses de cas du chapitre 5 ont nécessité la considération de restrictions sur le domaine de paramétrisation du plan complexe et/ou sur les paramètres de l'EDO étudiée. Par exemple, l'équation de Jacobi (section 5.1.10) mène à une surface s'écrivant en termes de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1(v_1, v_2; v_3; z)$ possédant une représentation en série dont la convergence doit être assurée en imposant certaines contraintes sur ses paramètres. Ces restrictions ne sont pas absolues en ce sens que le choix d'une représentation différente (une

intégrale de contour, par exemple) pourrait mener à des contraintes différentes. Dans le cas qui nous intéresse, le domaine de convergence considéré pour l'immersion de la surface associée à l'équation de Jacobi est

$$\mathcal{D}_{\text{Jacobi}} = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < 1 \text{ et } |\xi + 1| < 2|\alpha|\},$$

où α est un paramètre complexe de l'EDO. Le calcul de certaines intégrales a pu être facilité en passant à une telle représentation en série. Cependant, ce passage a mené à d'autres contraintes puisqu'il a forcé la tenue d'un test de convergence dans les calculs subséquents, ajoutant de nouvelles contraintes sur le domaine de convergence de la paramétrisation et des paramètres de l'EDO (voir (5.202)).

Nous avons mentionné en introduction l'importance d'obtenir une représentation numérique d'objets mathématiques, insistant sur les avantages que peuvent apporter la visualisation du comportement autrement caché dans des expressions mathématiques implicites. Dans chaque analyse de cas, une image numérique de la représentation de la surface plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 a été effectuée. Ces images ont été obtenues à l'aide du logiciel *Mathematica*. Des essais ont d'abord été effectués pour programmer l'affichage en représentation intégrale par un code du type

```
(*Définition des fonctions holomorphes \[Psi] et \[Eta]*)
\[Psi][\[Xi]_] := f[z];
\[Eta][\[Xi]_] := g[z];
(* Composantes de F dans R^3 *)
F1[x_,y_] := 1/2*Re[NIntegrate[(\[Psi][\[Xi]]^2-1)*\[Eta][\[Xi]]^2,
    {\[Xi], z0, x + I*y}]];
F2[x_,y_] := -1/2*Im[I*NIntegrate[(\[Psi][\[Xi]]^2+1)*\[Eta][\[Xi]]^2,
    {\[Xi], z0, x + I*y}]];
F3[x_,y_] := 2*Re[NIntegrate[(\[Psi][\[Xi]]*\[Eta][\[Xi]]^2,
    {\[Xi], z0, x + I*y}]];
ParametricPlot3D[{F1[x,y],F2[x,y],F3[x,y]}, {x,a,b},{y,c,d}]
```

Le problème avec un tel code est qu'il demande à la machine d'intégrer les fonctions η et χ autant de fois que le nombre de points que contiendra la trace de la surface, multiplié par le nombre de composantes. Le nombre d'opérations est alors élevé, d'autant plus si l'on considère que les fonctions à intégrer, soient η et χ , ont dans certains cas elles-mêmes une représentation intégrale. Nous avons donc calculé la primitive des intégrales (5.1)

$$I_1 := \int_{\xi_0}^{\xi} \eta^2 dz, \quad I_2 := \int_{\xi_0}^{\xi} \chi^2 \eta^2 dz, \quad I_3 := \int_{\xi_0}^{\xi} \chi \eta^2 dz,$$

afin d'exprimer la surface dans Mathematica par une expression du type (5.2)

$$F = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re}(I_1 - I_2), -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(I_1 + I_2), \operatorname{Re}(I_3) \right)^T \in \mathbb{R}^3,$$

tel qu'illustré dans l'annexe 7.B. Cette stratégie a permis d'optimiser considérablement le temps de calcul pour l'affichage d'une surface, passant de quelques heures à quelques secondes.

Nous avons présenté à la figure 5.10 une impression 3D de la surface associée à l'équation de Gegenbauer, réalisée conjointement avec le département de Génie électrique et génie informatique et le département de Génie mécanique de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

Plusieurs questions liées à la caractérisation des surfaces associées aux **PO** restent ouvertes. La surface (5.16) associée aux polynômes de Legendre ne possède aucun pôle alors que des pôles d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}$ se manifestent dans l'expression (5.147) décrivant la surface associée aux polynômes de Laguerre associés. Quelle est la structure de singularité de ces surfaces? Les anses (trous) apparaissant dans certaines surfaces sont-elles liées à ces singularités? Notamment, les figures 5.3 et 5.4 présentées à la section 5.1.3 soulèvent la question du genre de la surface (*genus*). En effet, en exprimant la variable paramétrique sous forme polaire et en considérant un angle $\theta \in [0, \pi]$, nous obtenons une figure qui n'est pas centrée par rapport à l'axe $F_1(\xi)$, comportant une seule anse. En considérant un angle $\theta \in [0, 2\pi]$, nous obtenons une figure centrée par rapport à l'axe $F_1(\xi)$, comportant deux anses, ce qui suggère que $\text{Genre} \geq 2$. Les surfaces sont-elles bornées? Peut-on exprimer les zéros et les optimums, s'ils existent, en termes des fonctions méromorphes arbitraires de la représentation d'Enneper-Weierstrass? Quelles sont les symétries de ces surfaces? Ces questions devront être abordées de manière

analytique.

Des travaux futurs pourraient tenir compte de l'intervalle d'orthogonalité des **PO** dans l'étude des surfaces qui y sont associées. Par exemple, il est bien connu que les polynômes de Legendre réels forment un système orthogonal sur l'intervalle $]-1,1[$. Dans certains cas, nous avons observé que cet intervalle décrit une courbe sur la surface. Quelle est la signification géométrique d'une telle courbe ? Peut-on lier la courbure et la torsion décrivant cette courbe à des propriétés intrinsèques de la surface ? Finalement, il serait intéressant d'étudier le comportement de la surface lorsqu'une déformation est appliquée à celle-ci.

CHAPITRE 7

ANNEXES

7.A Sommaire des résultats du chapitre 5

Nous résumons dans cette annexe les résultats du chapitre 5 sous la forme de tables présentant la forme explicite des surfaces ainsi que les éléments du **PL**. Chaque table comporte cinq parties : les fonctions méromorphes η (voir (4.70)) et χ (voir (4.71)), les composantes de la matrice de potentiel \mathcal{U} (voir (4.61)), les composantes de la fonction d'onde Ψ (voir (4.67) et (4.65)), les composante de la surface $F \in \mathbb{R}^3$ (voir (3.22)), et les composantes de la surface $\tilde{F} \in \mathfrak{su}(2)$ (voir (3.65)).

Dans chaque cas, nous considérons le paramètre spectral $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les paramètres de l'EDO et quatre constantes d'intégration arbitraires $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_2, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$. Pour plus de clarté, nous utilisons la notation z^* pour désigner le complexe conjugué de z . Nous identifions les fonctions spéciales apparaissant dans les formules au bas de chaque table, accompagnées des notations et des contraintes assurant la convergence de la représentation, lorsque cela est nécessaire.

Tableau 7.1 Sommaire : équation de Legendre

Equation de Legendre : $(1 - z^2) \frac{d^2 \omega}{dz^2} - 2z \frac{d\omega}{dz} + \alpha(\alpha + 1)\omega = 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \quad z \neq \pm 1.$

$$\frac{c_1^2}{-z^2}, \quad \chi = -\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta_1 z + c_2}{c_1^2}.$$

$$u_{22} = -\frac{\Delta_1 z + c_2}{1 - z^2}, \quad u_{12} = -\lambda \frac{c_1^2}{1 - z^2}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \frac{(\Delta_1 z + c_2)^2}{c_1^2 (1 - z^2)}.$$

$$_1 P_\alpha(z) + k_2 Q_\alpha(z), \quad \Psi_2 = \frac{1}{\lambda c_1^2} [k_1 (P_\alpha(z)(\Delta_2 z + c_2) - \alpha P_{\alpha-1}(z)) + k_2 (Q_\alpha(z)(\Delta_2 z + c_2) - \alpha Q_{\alpha-1}(z))].$$

$$_2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{c_1^4} [\Delta_3 (\phi_1 - \phi_2) + 2\Delta_1^2 z]_{\xi_0}^\xi \right), \quad F_2 = -\frac{1}{4\lambda^2} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{c_1^4} [\Delta_3 (\phi_1 - \phi_2) - 2\Delta_1^2 z]_{\xi_0}^\xi \right),$$

$$\operatorname{Re} \left([(\Delta_1 - c_2) \log(1 - z) + (\Delta_1 + c_2) \log(1 + z)]_{\xi_0}^\xi \right).$$

$$_2 \tilde{F}_{22} = -\frac{i}{4\lambda} \left([(\Delta_1 - c_2) \phi_2 + (\Delta_1 + c_2) \phi_1]_{\xi_0}^\xi - \left([(\Delta_1 - c_2) \phi_2 + (\Delta_1 + c_2) \phi_1]_{\xi_0}^\xi \right)^* \right)$$

$$_2 \left(c_1^2 [\phi_1 - \phi_2]_{\xi_0}^\xi - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1^4} [(\Delta_1 + c_2)^2 \phi_1 - (\Delta_1 - c_2)^2 \phi_2 - 2\Delta_1^2 z]_{\xi_0}^\xi \right)^* \right)$$

$$\left(\frac{1}{\lambda^2 c_1^4} [(\Delta_1 + c_2)^2 \phi_1 - (\Delta_1 - c_2)^2 \phi_2 - 2\Delta_1^2 z]_{\xi_0}^\xi - \left(c_1^2 [\phi_1 - \phi_2]_{\xi_0}^\xi \right)^* \right).$$

Polynômes de Legendre d'ordre ν , 1^{ère} et 2^{ème} espèce.

$$\alpha + 1), \quad \Delta_2 = \alpha(\alpha + 2), \quad \Delta_3 = \lambda^2 c_1^4 - (\alpha(\alpha + 1) + c_2)^2, \quad \phi_1 = \log(1 + z), \quad \phi_2 = \log(1 - z).$$

Tableau 7.2 Sommaire : équation de Legendre associée

Equation de Legendre associée : $(1-z^2)\frac{d^2\omega}{dz^2} - 2z\frac{d\omega}{dz} + \left(\alpha(\alpha+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)\omega = 0$, $\alpha, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $z \neq \pm 1$.

$$\chi = \frac{1}{\lambda} \frac{\frac{m^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \Delta z + c_2}{c_1^2}.$$

$$u_{12} = \frac{\frac{m^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \Delta z + c_2}{1 - z^2}, \quad u_{12} = -\lambda \frac{c_1^2}{(1 - z^2)}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \frac{\left(\frac{m^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \Delta z + c_2\right)^2}{c_1^2(1 - z^2)}.$$

$$\begin{aligned} & (z) + k_2 Q_\alpha^m(z), \\ & \left(\frac{m^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \Delta z + c_2\right) [k_1 P_\alpha^m(z) + k_2 Q_\alpha^m(z)] + k_1 \frac{(z^2 - 1)^{m/2}}{2^\alpha \alpha!} \left(mz \frac{d^{m+\alpha}}{dz^{m+\alpha}} (z^2 - 1)^\alpha + (z^2 - 1) \frac{d^{m+\alpha+1}}{dz^{m+\alpha+1}} (z^2 - 1)^\alpha\right) \\ & + k_2 (z^2 - 1)^{m/2} \left(mz \frac{d^m}{dz^m} Q_\alpha(z) + (z^2 - 1) \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} Q_\alpha(z)\right) \Big]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{c_1^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{24\lambda^2 c_1^2} (-24(\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)z + 12(c_2^2 + 2c_2\alpha + \alpha^2 + 2c_2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)\phi_1 \right. \\ & \left. + (\Delta)\phi_1^2 + m^4\phi_1^3 + 3m^2\phi_2^2(2c_2 - 2\Delta + m^2\phi_1) - m^4\phi_2^3 - \phi_2(12c_2^2 - 24c_2\Delta + \Delta(12\Delta - 7,225 \cdot m^2) \right. \\ & \left. + 12m^2(c_2 + \Delta)\phi_1 + 3m^4\phi_1^2) - 24m^2\Delta Li_2((1 - z)/2) \right]_{\xi_0}^\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left[\frac{c_1^2}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{24\lambda^2 c_1^2} (-24(\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)z + 12(c_2^2 + 2c_2\alpha + \alpha^2 + 2c_2\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)\phi_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + (\Delta)\phi_1^2 + m^4\phi_1^3 + 3m^2\phi_2^2(2c_2 - 2\Delta + m^2\phi_1) - m^4\phi_2^3 - \phi_2(12c_2^2 - 24c_2\Delta + \Delta(12\Delta - 7,225 \cdot m^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + 12m^2(c_2 + \Delta)\phi_1 + 3m^4\phi_1^2) - 24m^2\Delta Li_2((1 - z)/2) \right]_{\xi_0}^\xi \right), \end{aligned}$$

$$\left([m^2\phi_2^2 + \phi_1(4(\Delta - c_2) - 2m^2\phi_1) + \phi_1(4(\Delta + c_2) + m^2\phi_1)]_{\xi_0}^\xi \right).$$

Tableau 7.2 (suite)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{22} = & -\frac{i}{16\lambda} \left(\left[m^2 \phi_2^2 + \phi_2(4(\Delta - c_2) - 2m^2 \phi_1) + \phi_1(4(\Delta + c_2) + m^2 \phi_1) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\ & \left. + \left(\left[m^2 \phi_2^2 + \phi_2(4(\Delta - c_2) - 2m^2 \phi_1) + \phi_1(4(\Delta + c_2) + m^2 \phi_1) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right), \\ -\frac{i}{4} \left(\left[c_1^2 (\phi_1 - \log(1 - z)) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{12\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1^2} \left[(-24(\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)z + 12(c_2^2 + 2c_2\alpha + (2c_2 + 1)\alpha^2 + 2\alpha^3 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha^4)\phi_1 + 6m^2(c_2 + \Delta)\phi_1^2 + m^4\phi_1^3 + 3m^2\phi_2^2(2c_2 - 2\Delta + m^2\phi_1) - m^4\phi_2^3 - \phi_2(12c_2^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \Delta(12\Delta - 7,225 \cdot m^2 - 24c_2) + 12m^2(c_2 + \Delta)\phi_1 + 3m^4\phi_1^2) - 24m^2\Delta Li_2((1 - z)/2) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right), \\ \left(\frac{1}{12\lambda^2 c_1^2} \left[-24(\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)z + 12(c_2^2 + 2c_2\alpha + (2c_2 + 1)\alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4)\phi_1 + 6m^2(c_2 + \Delta)\phi_1^2 + m^4\phi_1^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + 3m^2\phi_2^2(2c_2 - 2\Delta + m^2\phi_1) - m^4\phi_2^3 - \phi_2(12c_2^2 + \Delta(12\Delta - 7,225 \cdot m^2 - 24c_2) \right. \right. \\ & \left. \left. + 12m^2(c_2 + \Delta)\phi_1 + 3m^4\phi_1^2) - 24m^2\Delta Li_2((1 - z)/2) \right]_{\xi_0}^{\xi} + \left(\left[c_1^2 (\phi_1 - \phi_2) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right), \end{aligned}$$

$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$: Fonctions de Legendre associées, 1^{ère} et 2^{ème} espèce, Li_2 : Fonction polylogarithmique.

$\alpha + 1$), $\phi_1 = \log(1 + z)$, $\phi_2 = \log(1 - z)$.

Tableau 7.3 Sommaire : équation de Bessel

Bessel : $z^2 \frac{d^2 \omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} + (z^2 - p^2) \omega = 0, \quad p \in \mathbb{C}.$

$$\chi = \frac{1}{\lambda c_1} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right).$$

$$= \frac{1}{z} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right), \quad u_{12} = -\frac{\lambda c_1}{z}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda c_1} \frac{1}{z} \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right)^2.$$

$$(z) + k_2 \mathcal{Y}_p(z),$$

$$+ \left(-\frac{z}{2} \mathcal{J}_{p-1}(z) + \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \mathcal{J}_p(z) + \frac{z}{2} \mathcal{J}_{p+1}(z) \right) + k_2 \left(\mathcal{Y}_{p-1}(z) + \left(p^2 \log(z) - \frac{z^2}{2} + c_2 \right) \mathcal{Y}_p(z) - \mathcal{Y}_{p+1}(z) \right).$$

$$\left(\frac{1}{c_1} \left[\left(\lambda^2 c_1^2 - c_2^2 + \frac{p^2 z^2}{2} \right) \log(z) - c_2 p^2 \log^2(z) - \frac{p^4}{3} \log^3(z) - (4p^2 - 8c_2 + z^2) \frac{z^2}{16} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),$$

$$m \left(\frac{1}{c_1} \left[\left(\lambda^2 c_1^2 + c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) \log(z) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) + (4p^2 - 8c_2 + z^2) \frac{z^2}{16} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \quad F_3 = \frac{1}{\lambda} \Re e \left(\left[c_2 \log(z) + \frac{p^2}{2} \log^2(z) - \frac{z^2}{4} \right]_{\xi_0}^{\xi} \right).$$

$$= -\frac{i}{2\lambda} (\phi + \phi^*),$$

$$c_1 \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1} \left[\log(z) \left(c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) + \frac{z^2}{16} (-8c_2 + 4p^2 + z^2) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^*$$

$$\frac{1}{c_1} \left[\left(\log(z) \left(c_2^2 - \frac{p^2 z^2}{2} \right) + \frac{z^2}{16} (-8c_2 + 4p^2 + z^2) + c_2 p^2 \log^2(z) + \frac{p^4}{3} \log^3(z) \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} - \left(c_1 \log(z) \Big|_{\xi_0}^{\xi} \right)^*.$$

ctions de Bessel d'ordre p , 1^{ère} et 2^{ème} espèce. $\phi = \left[\frac{p^2}{2} \log^2(z) - \frac{z^2}{4} + c_2 \log(z) \right]_{\xi_0}^{\xi}.$

Tableau 7.4 Sommaire : équation de Chebyshev

on de Chebyshev de 1^{ère} espèce¹⁾ : $(1 - z^2) \frac{d^2 \omega}{dz^2} - z \frac{d\omega}{dz} + n^2 \omega = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \neq \pm 1.$

$$\frac{c_1}{1-z^2}, \quad \chi = -\frac{1}{\lambda} \frac{n^2 \phi + c_2}{c_1}.$$

$$u_{22} = -\frac{n^2 \phi + c_2}{\sqrt{1-z^2}}, \quad u_{12} = -\frac{\lambda c_1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \frac{(n^2 \phi + c_2)^2}{c_1 \sqrt{1-z^2}}.$$

$$_1 T_n(z) + k_2 \sqrt{1-z^2} T_{2,n-1}(z),$$

$$\frac{1}{c} \left(-k_1 (n^2 \arcsin(z) + c_1) T_n(z) + \frac{k_1(n+1)}{\sqrt{1-z^2}} T_{n-2}(z) + \left(-k_2 (n^2 \arcsin(z) + c_1) \sqrt{1-z^2} + \frac{k_1 n - 2k_2 z}{\sqrt{1-z^2}} \right) T_{2,n-1} \right).$$

$$\Re \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[(\lambda^2 c_1^2 - c_2^2) \phi + n^2 c_2 \phi^2 - \frac{n^4}{3} \phi^3 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right), \quad F_2 = -\frac{1}{2} \Im m \left(\frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[(\lambda^2 c_1^2 + c_2^2) \phi - n^2 c_2 \phi^2 + \frac{n^4}{3} \phi^3 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda} \Re e \left(\left[c_2 \phi + \frac{n^2}{2} \phi^2 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right).$$

$$- \tilde{F}_{22} = \frac{i}{2\lambda} \left(\left[c_2 \phi + \frac{n^2}{2} \phi^2 \right]_{\xi_0}^{\xi} + \left(\left[c_2 \phi + \frac{n^2}{2} \phi^2 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right),$$

$$- \frac{c_1 i}{2} \cdot \phi|_{\xi_0}^{\xi} + \frac{i}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1} \left[c_2^2 \phi - n^2 c_2 \phi^2 + \frac{n^4}{3} \phi^3 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^*, \quad \tilde{F}_{21} = \frac{i}{2\lambda^2 c_1} \left[c_2^2 \phi - n^2 c_2 \phi^2 + \frac{n^4}{3} \phi^3 \right]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{i}{2} \left(c_1 \cdot \phi|_{\xi_0}^{\xi} \right)^*.$$

Polynômes de Chebyshev d'ordre n , 1^{ère} et 2^{ème} espèce. $\phi = \arcsin(z)$.

obtenir les résultats associés à l'équation de Chebyshev de seconde espèce, il suffit d'appliquer la transformation $n \mapsto \sqrt{n}\sqrt{n+2}$.

Tableau 7.5 Sommaire : équation de Laguerre

Equation de Laguerre : $z \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (1-z) \frac{d\omega}{dz} + \alpha \omega = 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}, \quad z \neq 0.$

$$\chi = \frac{\alpha c_1 e^{-z} + c_2}{\lambda}.$$

$$v_1 = \frac{\alpha + \frac{c_2}{c_1} e^z}{z}, \quad u_{12} = -\frac{\lambda e^z}{c_1 z}, \quad u_{21} = \frac{(\alpha c_1 e^{-z} + c_2)^2 e^z}{\lambda c_1 z}.$$

$$v_2(z) + k_2 U(-\alpha, 1, z), \quad \Psi_2 = \frac{1}{\lambda} \left[k_1 \left(c_2 L_\alpha(z) + \frac{c_1 \alpha}{e^z} L_{\alpha-1}(z) \right) + k_2 \left(\left(\frac{c_1 \alpha}{e^z} + c_2 \right) U(-\alpha, 1, z) - \frac{c_1 \alpha z}{e^z} U(1-\alpha, 2, z) \right) \right].$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{c_1} (\lambda^2 - c_2^2) Ei(z) - \alpha^2 c_1 Ei(-z) - 2\alpha c_2 \log(z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}, \\ & v_1 \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{c_1} (\lambda^2 + c_2^2) Ei(z) + \alpha^2 c_1 Ei(-z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}, \quad F_3 = \Re e \left(\frac{1}{\lambda} \left[\alpha \log(z) + \frac{c_2}{c_1} Ei(z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \left[\frac{c_2}{c_1} Ei(z) + \alpha \log(z) \right] \right)_{\xi_0}^{\xi} + \overline{\frac{1}{\lambda} \left[\frac{c_2}{c_1} Ei(z) + \alpha \log(z) \right] \bigg|_{\xi_0}^{\xi}}, \\ & \left(\frac{1}{c_1} Ei(z) \right)_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{c_2^2}{c_1} Ei(z) + \alpha^2 c_1 Ei(-z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right] \bigg|_{\xi_0}^{\xi}}, \\ & \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{c_2^2}{c_1} Ei(z) + \alpha^2 c_1 Ei(-z) + 2\alpha c_2 \log(z) \right] \bigg|_{\xi_0}^{\xi} - \overline{\frac{1}{c_1} Ei(z) \bigg|_{\xi_0}^{\xi}}. \end{aligned}$$

fonction gamma incomplète, $L_{v_1}^{v_2}$: Polynôme de Laguerre associé, $U(v_1, v_2, z)$: Fonction hypergéométrique, $2^{\text{ème}}$ espèce, fonction exponentielle intégrale.

Tableau 7.6 Sommaire : équation de Laguerre associée

on de Laguerre associée : $z \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (\alpha + 1 - z) \frac{d\omega}{dz} + n\omega = 0, \quad \alpha, n \in \mathbb{N}, \quad z \neq 0.$

$$\frac{z}{\alpha+1}, \quad \chi = \frac{1}{\lambda}(nc_1\phi_1 + c_2)$$

$$u_{22} = \frac{nc_1\phi_1 + c_2}{c_1 z^{\alpha+1} e^{-z}}, \quad u_{12} = -\lambda \frac{e^z}{c_1 z^{\alpha+1}}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \frac{(nc_1\phi_1 + c_2)^2}{c_1 z^{\alpha+1} e^{-z}}.$$

$$L_n^\alpha(z) + k_2 U(-n, \alpha + 1, z),$$

$$\left[k_1 \left(((nc_1\phi_1 + c_2) - nc_1 z^\alpha e^{-z}) L_n^\alpha(z) + (n + \alpha) c_1 z^{\alpha+1} e^{-z} L_{n-1}^\alpha(z) \right) \right. \\ \left. + k_2 \left((nc_1\phi_1 + c_2) U(-n, \alpha + 1, z) - nc_1 z^{\alpha+1} e^{-z} U(-n + 1, \alpha + 2, z) \right) \right].$$

$$e \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^\alpha \sum_{q=0}^\alpha \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} + \frac{1}{c_1} (c_2^2 - \lambda^2) z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) - 2nc_2 \phi_2 \right]_{\xi_0}^\xi \right),$$

$$\Im \left(\frac{1}{\lambda^2} \left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^\alpha \sum_{q=0}^\alpha \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} - \frac{1}{c_1} (\lambda^2 + c_2^2) z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \phi_2 \right]_{\xi_0}^\xi \right), \quad F_3 = \frac{1}{\lambda} \Re \left(\left[n\phi_2 - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right]_{\xi_0}^\xi \right).$$

$$\tilde{F}_{22} = -\frac{i}{2\lambda} \left(\left[n\phi_2 - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right]_{\xi_0}^\xi + \left(\left[n\phi_2 - \frac{c_2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \right]_{\xi_0}^\xi \right)^* \right),$$

$$\left(\frac{1}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \Big|_{\xi_0}^\xi + \frac{1}{\lambda^2} \left(\left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^\alpha \sum_{q=0}^\alpha \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} - \frac{c_2^2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \phi_2 \right]_{\xi_0}^\xi \right)^* \right),$$

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} \left[-n^2 c_1 (\alpha!)^2 \sum_{p=0}^\alpha \sum_{q=0}^\alpha \frac{\Gamma(p+q-\alpha, z)}{p!q!} - \frac{c_2^2}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) + 2nc_2 \phi_2 \right]_{\xi_0}^\xi + \left(\frac{1}{c_1} z^{-\alpha} E_{\alpha+1}(-z) \Big|_{\xi_0}^\xi \right)^* \right).$$

Fonction gamma incomplète, $L_{v_1}^{v_2}$: Polynôme de Laguerre associé, $U(v_1, v_2, z)$: Fonction hypergéométrique, 2^{ème} espèce,

onction exponentielle intégrale. $\phi_1 = \Gamma(\alpha + 1, z), \quad \phi_2 = \alpha! \sum_{r=0}^{\alpha-1} \frac{z^{r-\alpha}}{r!(r-\alpha)} + \log(z).$

Tableau 7.7 Sommaire : équation d'Hermite

'Hermite : $\frac{d^2\omega}{dz^2} - 2z\frac{d\omega}{dz} - 2n\omega = 0, n \in \mathbb{Z}$.

$$, \quad \chi = \frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds.$$

$$z = 2ne^{z^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds, \quad u_{12} = -\lambda c_1^2 e^{z^2}, \quad u_{21} = \frac{4n^2}{\lambda c_1^2} e^{z^2} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2.$$

$$-n(z) + k_2 {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right), \\ k_1 \left(\frac{e^{-z^2}}{c_1} H_{-n-1}(z) - H_{-n}(z) \right) - k_2 \left({}_1F_1\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right) + {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)$$

$$\left(c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \left(1 - \left(\frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 \right) e^{z^2} dz \right), \\ {}_1 \left(c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} \left(1 + \left(\frac{2n}{\lambda c_1^2} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 \right) e^{z^2} dz \right), \\ \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz \right).$$

$$= -\frac{ni}{\lambda} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz + \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \cdot e^{z^2} dz \right)^* \right), \\ c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} e^{z^2} dz - \frac{4n^2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 e^{z^2} dz \right)^* \Bigg), \\ \frac{i^2}{c_1^2} \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\int_{z_0}^z e^{-s^2} ds \right)^2 e^{z^2} dz - \left(c_1^2 \int_{\xi_0}^{\xi} e^{z^2} dz \right)^* \Bigg).$$

ies d'Hermite d'ordre n , ${}_pF_q$, : Fonction hypergéométrique.

Tableau 7.8 Sommaire : équation de Gegenbauer

on de Gegenbauer : $(1-z^2)\frac{d^2\omega}{dz^2} - (2\alpha+1)\frac{d\omega}{dz} + n(n+2\alpha)\omega = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq \pm 1$.

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha+1/2}, \quad \chi = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta_2(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha-1/2+c_2}}{c_1\Delta_3}$$

$$-u_{22} = \frac{\Delta_2+c_2\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha+1/2}}{\Delta_3}, \quad u_{12} = -\lambda c_1 \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha+1/2}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta_2^2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha+1/2}+2c_2\Delta_2+c_2^2\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha+1/2}}{c_1\Delta_3^2}.$$

$$_1\phi_1 + k_2 2^{\alpha-1/2}(z-1)^{-\alpha+1/2}\phi_2,$$

$$\frac{1}{c_1} \left[k_1 \left(\frac{\Delta_2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha+1/2}+c_2}{\Delta_3} \phi_1 + \frac{1}{4} \frac{(\Delta_1+1)(\Delta_1-1)}{\alpha+1/2} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\Delta_3/4} \phi_3 \right) \right. \\ \left. + k_2 2^{\alpha-1/2}(z-1)^{1/2-\alpha} \left(\left(\frac{\Delta_2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha+1/2}+c_2}{\Delta_3} + (1/2-\alpha)(z-1)^{-1} \right) \cdot \phi_2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta_1(\alpha+1/4\Delta_1)}{3/2-\alpha} \phi_4 \right) \right].$$

$$\Re \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 - \frac{1}{\lambda^2 c_1 \Delta_3^2} \left(\frac{\Delta_2^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} \phi_6 + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 + 2c_2 \Delta_2 z \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),$$

$$\frac{1}{2} \Im \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 + \frac{1}{\lambda^2 c_1 \Delta_3^2} \left(\frac{\Delta_2^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} \phi_6 + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 + 2c_2 \Delta_2 z \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right),$$

$$\Re \left(\frac{1}{\Delta_3} \left[\Delta_2 z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right).$$

Tableau 7.8 (suite)

$$\begin{aligned}
 z = & -\frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1}{\Delta_3} \left[\Delta_2 z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 \right]_{\xi_0}^{\xi} + \left(\frac{1}{\Delta_3} \left[\Delta_2 z + \frac{c_2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right), \\
 & \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 \right]_{\xi_0}^{\xi} - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1 \Delta_3^2} \left[\frac{\Delta_2^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} \phi_6 + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 + 2c_2 \Delta_2 z \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right), \\
 & \frac{1}{\lambda^2 c_1 \Delta_3^2} \left[\frac{\Delta_2^2 \cdot 2^{\alpha+3/2}}{1-2\alpha} (1+z)^{1/2-\alpha} \phi_6 + \frac{c_2^2 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 + 2c_2 \Delta_2 z \right]_{\xi_0}^{\xi} - \left(\left[\frac{c_1 \cdot 2^{1/2-\alpha}}{2\alpha+3} \phi_5 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^*.
 \end{aligned}$$

tion hypergéométrique. $\Delta_1 = \sqrt{4n^2 + 8\alpha n + 1}$, $\Delta_2 = n(n+2\alpha)$, $\Delta_3 = 2\alpha + 1$.

$$\begin{aligned}
 & -1/2(\Delta_1 + 1), 1/2(\Delta_1 - 1); \alpha + 1/2; \frac{1-z}{2}, & \phi_2 = {}_2F_1 \left(-\alpha - 1/2\Delta_1, 1/2\Delta_1; 3/2 - \alpha; \frac{1-z}{2} \right), \\
 & 1 - 1/2(\Delta_1 + 1), 1 + 1/2(\Delta_1 - 1); \alpha + 3/2; \frac{1-z}{2}, & \phi_4 = {}_2F_1 \left(1 - \alpha - 1/2\Delta_1, 1 + 1/2\Delta_1; 5/2 - \alpha; \frac{1-z}{2} \right), \\
 & ;)^{\alpha+3/2} {}_2F_1 \left(\alpha + 1/2, \alpha + 3/2; \alpha + 5/2; \frac{1+z}{2} \right), & \phi_6 = {}_2F_1 \left(-\alpha - 1/2, 1/2 - \alpha; 3/2 - \alpha; \frac{1+z}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Tableau 7.9 Sommaire : équation de Jacobi

Equation de Jacobi : $(1 - z^2) \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)z) \frac{d\omega}{dz} + n(n + \alpha + \beta + 1)\omega = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad z \neq \pm 1.$

$$(1 + z)^{-(\beta+1)}(1 - z)^{-(\alpha+1)}, \quad \chi = -\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta(z+1)^{\beta+1} \phi_3 + c_2}{c_1(\beta+1)}.$$

$$u_{22} = -\frac{\Delta(z+1)^{\beta+1} \phi_3 + c_2}{(\beta+1)(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}, \quad u_{12} = -\lambda \frac{c_1}{(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}, \quad u_{21} = \frac{1}{\lambda} \frac{(\Delta(z+1)^{\beta+1} \phi_3 + c_2)^2}{c_1(\beta+1)^2(1+z)^{\beta+1}(1-z)^{\alpha+1}}.$$

$$_1 \phi_1 + 2^\alpha k_2 (z - 1)^{-\alpha} \phi_2,$$

$$\frac{1}{c_1} \left[-k_1 \frac{\Delta}{2^\alpha} \left(\frac{2^\alpha (z+1)^{\beta+1} \phi_3 + c_2}{\beta+1} \phi_1 + \frac{1}{2(\alpha+1)} (1+z)^{\beta+1} (1-z)^{\alpha+1} \phi_4 \right) \right. \\ \left. + k_2 \left(-2^\alpha \frac{\Delta 2^{-\alpha} (z+1)^{\beta+1} \phi_3 + c_2}{\beta+1} (z-1)^{-\alpha} \phi_2 + 2^\alpha (-1)^\alpha \left(-\alpha (1+z)^{\beta+1} \phi_2 + \frac{(\alpha+n)(\beta+n+1)}{2(\alpha-1)} (1+z)^{\beta+1} (1-z) \phi_5 \right) \right) \right].$$

$$\Re \left(-\frac{c_1}{2^{\alpha+2}} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \phi_6 - \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^\xi - \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\frac{\Delta^2}{2^\alpha} (\beta+1)^2 \phi_{10} - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) - 2c_2 \Delta (\beta+1) \phi_8 \right]_{\xi_0}^\xi \right),$$

$$\frac{1}{2} \Im \left(-\frac{c_1}{2^{\alpha+2}} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \phi_6 - \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^\xi + \frac{1}{\lambda^2 c_1} \left[\frac{\Delta^2}{2^\alpha} (\beta+1)^2 \phi_{10} - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) - 2c_2 \Delta (\beta+1) \phi_8 \right]_{\xi_0}^\xi \right),$$

$$\frac{1}{\lambda} \Re \left(\frac{1}{(\beta+1)} \left[\Delta 2^{-\alpha} (\beta+1) \phi_9 - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^\xi \right).$$

Tableau 7.9 (suite)

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{1}{(\beta+1)} \left[\Delta 2^{-\alpha} (\beta+1) \phi_9 - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{(\beta+1)} \left[\Delta 2^{-\alpha} (\beta+1) \phi_9 - \frac{c_2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 - \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \right), \\
 &\frac{c_1}{2^{\alpha+2}} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{c_1} \left[\Delta^2 2^{-\alpha} (\beta+1)^2 \cdot \phi_{10} - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) - 2c_2 \Delta (\beta+1) \phi_8 \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \Bigg), \\
 &\frac{1}{2c_1} \left[\Delta^2 2^{-\alpha} (\beta+1)^2 \cdot \phi_{10} - \frac{c_2^2}{2^{\alpha+2}} (z+1)^{-\beta} \left(\frac{z+1}{\beta-1} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) - 2c_2 \Delta (\beta+1) \phi_8 \right]_{\xi_0}^{\xi} \\
 &\quad + \left(\frac{c_1}{2^{\alpha+2}} \left[(1+z)^{-\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \phi_6 + \frac{2}{\beta} \phi_7 \right) \right]_{\xi_0}^{\xi} \right)^* \Bigg).
 \end{aligned}$$

ion hypergéométrique.

$$\vdash \alpha + \beta + 1), \quad \phi_1 = {}_2F_1(-n, \alpha + \beta + n + 1; \alpha + 1; \frac{1-z}{2}), \quad D = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < 1 \text{ et } |\xi + 1| < 2|\alpha|\}.$$

$$\alpha - n, \beta + n + 1; 1 - \alpha; \frac{1-z}{2}), \quad \phi_3 = {}_2F_1(-\alpha, \beta + 1; \beta + 2; \frac{1+z}{2}), \quad \phi_4 = {}_2F_1(1 - n, \alpha + \beta + n + 2; \alpha + 2; \frac{1-z}{2}),$$

$$\alpha - n + 1, \beta + n + 2; 2 - \alpha; \frac{1-z}{2}), \quad \phi_6 = {}_2F_1(1 - \beta, \alpha + 1; 2 - \beta; \frac{1+z}{2}), \quad \phi_7 = {}_2F_1(-\beta, \alpha; 1 - \beta; \frac{1+z}{2}),$$

$$\left(\frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1)s! 2^{s+\alpha+1}} {}_2F_1(s+1, \alpha+1; s+2; \frac{1+z}{2}) \right), \quad \phi_9 = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (z+1)^{s+1}}{(\beta+s+1)(s+1)s! 2^{s+1}} {}_2F_1(s+1, \alpha+1; s+2; \frac{1+z}{2}) \right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-\alpha)_s (-\alpha)_k (z+1)^{s+k+\beta+1}}{(\beta+s+1)(\beta+k+1)(\beta+s+k+1)s! k! 2^{s+k}} ({}_2F_1(s+k+\beta+1, \alpha+1; s+k+\beta+2; \frac{1+z}{2}) - {}_2F_1(s+k+\beta+1, \alpha; s+k+\beta+2; \frac{1+z}{2})) \right).$$

7.B Affichage numérique des surfaces

Plusieurs commandes en lien avec les fonctions spéciales sont implémentées dans le langage du logiciel de calcul symbolique *Mathematica*. On y offre plusieurs outils liés à la géométrie différentielle et à la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Pour ces raisons, notre choix s'est arrêté sur *Mathematica* pour l'affichage numérique des surfaces calculées dans cette étude.

Lorsque le paramètre spectral est introduit dans la représentation d'Enneper-Weierstrass (3.22), celle-ci représente une famille de surfaces solitoniques obtenues par la résolution du **PL**. Cette famille est paramétrisée par ce paramètre spectrale λ . Dans le cas d'une surface plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , le paramètre doit être fixé à une valeur réelle pour obtenir une surface en particulier. Cependant, cette surface décrit une famille de solutions si les paramètres de l'EDO (v_1, v_2, \dots etc.) et les constantes d'intégration ($k_j, a_j, j = 1, 2$) ne sont pas fixés *a priori*. Nous devons donc fixer ces paramètres pour obtenir une représentation tridimensionnelle d'une surface en particulier.

La formule d'immersion (3.22) représente une surface plongée dans \mathbb{R}^3 , à condition de faire varier la borne d'intégration supérieure ξ . Nous devons donc fixer la borne d'intégration inférieure ξ_0 et faire varier ξ sur un certain domaine du plan complexe \mathbb{C} . Nous considérons les formes rectangulaire $\xi = r + i\theta$ et polaire $\xi = re^{i\theta}$ d'un nombre complexe, où $r, \theta \in \mathbb{R}$. Dans le premier cas, nous faisons varier les parties réelle et imaginaire alors qu'avec la forme polaire, nous faisons varier la norme et l'argument de la borne intégrale supérieure. Avec la forme rectangulaire, nous intégrons sur un rectangle, alors qu'avec la forme polaire, l'intégration se fait sur un disque ou sur une couronne (*annulus*). Les choix de bornes d'intégration et d'intervalles doivent tenir compte de la structure de singularité de la surface. Un point trop près d'un point singulier produira une très petite valeur ou une très grande valeur.

L'ensemble de tous les points calculés

$$\vec{F}(v_{10}, v_{20}, \dots; \lambda_0; \xi_0; r, \theta) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad (7.1)$$

s'écrit

$$F = \{\vec{F}(v_{10}, v_{20}, \dots; \lambda_0; \xi_0; r, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [a, b], \theta \in [c, d], a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ fixés}\} \quad (7.2)$$

et représente une partie de la surface décrivant les solutions de l'EDO (4.68). Il est bien connu que le calcul intégral numérique fait appel à des méthodes d'approximation et nécessite une quantité importante d'opérations. Par exemple, pour l'équation d'Hermite, nous avons obtenu pour la première composante

$$F_1(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 - \chi^2(z)) \eta^2(z) dz, \quad \chi(\xi) = \frac{2n}{\lambda c^2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-s^2} ds. \quad (7.3)$$

Le calcul de centaines (voir milliers) de points définis par des expressions de la sorte résulte en un temps de calcul trop élevé. Pour pallier cela, nous calculons d'abord la primitive de l'intégrale de chaque composante de (3.22), nous tirons profit du théorème fondamental du calcul intégral et calculons des points par une expression de la forme

$$\vec{F}(v_{10}, v_{20}, \dots; \lambda_0; \xi_0; r, \theta) = G(\xi) - G(\xi_0) \in \mathbb{R}^3, \quad (7.4)$$

réduisant considérablement le temps de calcul (de plusieurs heures à quelques secondes). La commande d'affichage Mathematica utilisée est

$$\text{ParametricPlot3d}[\{F_1[r, \theta], F_2[r, \theta], F_3[r, \theta]\}, \{r, a, b\}, \{\theta, c, d\}]. \quad (7.5)$$

Nous présentons à la page suivante un exemple du code Mathematica utilisé pour afficher la figure 5.6, soit un cas particulier de la famille de surfaces solitoniques associée aux polynômes de Laguerre, plongée dans l'espace euclidien.

Code Mathematica pour l'affichage de la figure 5.6

```

\[Xi]0 = 1 + I ;      (*Borne inf. intégrale*)
a = -3;                (*Borne inf. ParametricPlot*)
b = 3;                 (*Borne sup. ParametricPlot*)
c = 0;                 (*Borne inf. ParametricPlot*)
d = 2*Pi;              (*Borne sup. ParametricPlot*)

(* Composantes de F dans R^3 *)

F1[r_, \[Theta]_] := 1/2*Re[N[ExpIntegralEi[(r*Exp[I*\[Theta]])], 3]
- N[ExpIntegralEi[-(r*Exp[I*\[Theta]])], 3]
- (N[ExpIntegralEi\[Xi]0], 3] - N[ExpIntegralEi[-\[Xi]0], 3])];

F2[r_, \[Theta]_] := -1/2*Im[N[ExpIntegralEi[(r*Exp[I*\[Theta]])], 3]
+ N[ExpIntegralEi[-(r*Exp[I*\[Theta]])], 3]
- (N[ExpIntegralEi\[Xi]0], 3] + N[ExpIntegralEi[-\[Xi]0], 3])];

F3[r_, \[Theta]_] := Re[N[Log[(r*Exp[I*\[Theta]])]]] - N[Log\[Xi]0]] ;

(* Affichage du résultat et configuration des options d'affichage *)

ParametricPlot3D[{F1[r, \[Theta]], F2[r, \[Theta]], F3[r, \[Theta]]},
  {r, a, b}, {\[Theta], c, d},
  AxesLabel -> {Style["!\(\(*SubscriptBox[\(F\), \{1\}\]\)\)\(\[Xi]\)", Black],
  Style["!\(\(*SubscriptBox[\(F\), \{2\}\]\)\)\(\[Xi]\)", Black],
  Style["!\(\(*SubscriptBox[\(F\), \{3\}\]\)\)\(\[Xi]\)", Black]},
  LabelStyle -> {20, Black}, TicksStyle -> {Directive[FontSize -> 20],
  AxesStyle -> 20}]

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Abramowitz and I. A. Segun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1965.
- [2] G. B. Arfken and H.-J. Weber. *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition*. Academic Press, Boston, 6th edition, 2005.
- [3] W. W. Bell. *Fonction spéciales à l'usage des chercheurs et des ingénieurs*. Dunod, Paris, 1971.
- [4] T. Bergkvist. On generalized Laguerre polynomials with real and complex parameter. *Research Reports in Mathematics, Stockholm University*, Volume 2.
- [5] A. Bobenko. Surfaces of constant mean curvature and integrable equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 46(4(280)) :3–42, 1991.
- [6] A. I. Bobenko. Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases. *Harmonic maps and integrable systems*, pages 83–127, 1994.
- [7] A. I. Bobenko and U. Eitner. *Painlevé equations in the differential geometry of surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [8] P. Bracken and A. M. Grundland. Solutions of the Generalized Weierstrass Representation in Four-Dimensional Euclidean Space. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 9(3) :357–381, 2002.
- [9] C. Brezinski, A. P. Magnus, A. Ronveaux, A. Draux, and P. Maroni. *Polynômes orthogonaux et applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [10] J. Dereziński. *Hypergeometric type functions and their symmetries*. Notes de cours, Faculty of Physics, University of Warsaw, Warsaw, 2012.
- [11] M. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Dover Publications, Mineola, second edition, 2016.
- [12] A. Doliwa and A. M. Grundland. Minimal surfaces in the soliton surface approach, arXiv ID : 1511.02173. 2015.
- [13] A. S. Fokas and I. M. Gelfand. Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability. *Communications in Mathematical Physics*, 177(1) :203–220, 1996.
- [14] A. M. Grundland. Soliton surfaces in the generalized symmetry approach. 188(3) :1322–1333, 2016.
- [15] A. M. Grundland and S. Post. Surfaces immersed in Lie algebras associated with elliptic integrals. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(1), 2012.
- [16] J. J. Kelly. *Handbook of Time Series Analysis*. WILEY-VCH, 2006.

- [17] K. Kenmotsu. Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature. *Mathematische Annalen*, 245(2) :89–99, 1979.
- [18] K. Kenmotsu. Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-Dimensional Space Forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(1) :133–138, 1983.
- [19] B. G. Konopelchenko and G. Landolfi. Generalized Weierstrass representation for surfaces in multi-dimensional Riemann spaces. *Journal of Geometry and Physics*, (29) :319–333, 1999.
- [20] B. G. Konopelchenko and G. Landolfi. Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 18(1) :61–74, 2000.
- [21] H. Krall and O. Frink. A New Class of Orthogonal Polynomials : The Bessel Polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 65(1) :100–115, 1949.
- [22] L. Lewin. *Polylogarithms and asociated functions*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [23] V. Lundsgaard Hansen. *Functional analysis - Entering Hilbert spaces*. World Scientific Publishing Co, second edition, 2016.
- [24] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's equation*. Dover Publications Inc, New York, 1979.
- [25] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. Sudarshan, and F. Zaccaria. F-Oscillators and Nonlinear Coherent States. *Physica Scripta*, 55(5) :528–541, 1997.
- [26] F. Olver. *Asymptotics ans special functions*. Academic press, New York, 1974.
- [27] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover, Mineola, 1986.
- [28] E. D. Rainville. *Special functions*. The MacMillan Company, New York, 1960.
- [29] W.-K. Shao, Y. He, and J. Pan. Some identities for the generalized Laguerre polynomials. *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9 :3388–3396, 2016.
- [30] A. Sym. Soliton surfaces. *Littere al Nuovo cimento*, 41(2) :33–40, 1984.
- [31] A. Sym. Soliton surfaces and their application. *Institute of theoretical physics of Warsaw University*, pages 154–231, 1985.
- [32] J. Tafel. Surfaces in R^3 with prescribed curvature. *Journal of Geometry and Physics*, 17 :381–390, 1995.
- [33] K. Thirulogasanthar and S. T. Ali. A class of vector coherent states defined over matrix domains. *Journal of Mathematical Physics*, 44(11) :5070–5083, 2003.
- [34] K. Thirulogasanthar and S. T. Ali. Regular subspaces of a quaternionic Hilbert space from quaternionic Hermite polynomials and associated coherent states. *Journal of Mathematical Physics*, 54(1) :1–20, 2013.

- [35] K. Thirulogasanthar, G. Honnouvo, and A. Krzyzak. Coherent states and Hermite polynomials on quaternionic Hilbert spaces. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(38), 2010.
- [36] Wolfram Research. Chebychev polynomials of the first kind, consulté en décembre 2018. URL : <http://functions.wolfram.com/Polynomials/ChebyshevT/20/01/01/0001/>.
- [37] Wolfram Research. Chebyshev polynomials of the second kind, consulté en décembre 2018. URL : <http://functions.wolfram.com/Polynomials/ChebyshevU/20/01/01/0001/>.
- [38] Wolfram Research. Complete Orthogonal System, consulté en décembre 2018. URL : <http://mathworld.wolfram.com/CompleteOrthogonalSystem.html>.
- [39] Wolfram Research. Exponential integral, consulté en novembre 2018. URL : <http://functions.wolfram.com/06.35.02.0001.01>.
- [40] Wolfram Research. Gamma function, consulté en novembre 2018. URL : <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>.
- [41] Wolfram Research. Gauss hypergeometric function, consulté en septembre 2018. URL : <http://functions.wolfram.com/07.23.20.0010.01>.
- [42] Wolfram Research. Hermite Polynomials, consulté en décembre 2018. URL : <http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html>.
- [43] Wolfram Research. Incomplete Gamma, consulté en juin 2018. URL : <http://mathworld.wolfram.com/IncompleteGammaFunction.html>.
- [44] C. J. Zarowski. *An introduction to numerical analysis for electrical engineers and computer engineers*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2004.
- [45] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1995.